

2019

## MATHEMATICS — GENERAL

Paper : CC/GE-2

Full Marks : 65

Candidates are required to give their answers in their own words  
as far as practicable.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক

বিভাগ - ক

(মান : ১০)

১। সঠিক উত্তর চিহ্নিত করো :

১×১০

(ক)  $\left\{\frac{1}{n}\right\}$  অনুক্রমটির গরিষ্ঠ অধঃসীমা (greatest lower bound) হল(অ)  $\infty$  (আ) 1 (ই) 0 (ঈ) এদের কোনোটিই নয়।(খ)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$  শ্রেণিটি

(অ) অভিসারী (আ) অপসারী (ই) সসীমভাবে দোদুল্যমান (ঈ) অসীমভাবে দোদুল্যমান।

(গ)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} =$ (অ)  $\infty$  (আ) 0 (ই) 1 (ঈ) অসংজ্ঞাত।(ঘ)  $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = e^{4x}$  অবকল সমীকরণটির C. F. হল(অ)  $C_1e^{-2x} + C_2e^{3x}$ (আ)  $C_1e^{2x} + C_2e^{-3x}$ (ই)  $C_1e^{6x} + C_2e^{-x}$ 

(ঈ) এগুলির কোনোটিই নয়।

(ঙ)  $z = (x+a)(y+b)$  অপেক্ষকটি থেকে  $a$  এবং  $b$  অপসারণ করলে যে আংশিক অন্তরকলন সমীকরণ (partial differential equation) পাওয়া যাবে, সেটি হল(অ)  $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (আ)  $Z = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}$ (ই)  $Z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$ 

(ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

Please Turn Over

(চ) যদি  $(ai + 6j + 9k)$  এবং  $(-5i + 2j + bk)$  ভেক্টর দুটি সমরেখ (collinear) হয়, তবে

(অ)  $a = b = 1$

(আ)  $a = -15, b = 3$

(ই)  $a = 3, b = 9$

(ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(ছ)  $\vec{a} = 2i + 2j - k$  এবং  $\vec{b} = 3i - j + 4k$  ভেক্টর দুটির অন্তর্নিহিত কোণের পরিমাপ হল

(অ) 0

(আ)  $\frac{\pi}{3}$

(ই)  $\frac{\pi}{4}$

(ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(জ) যদি  $7^{30}$  কে 4 দ্বারা ভাগ করা হয়, তবে ভাগশেষ হবে

(অ) 0 (আ) 1 (ই) 2 (ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(ঝ)  $9x + 6y = 1$ , এই Diophantine সমীকরণটির বীজ (solution) আছে

(অ) কেবলমাত্র একটি

(আ) দুটি

(ই) একটিও নয়

(ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(ঞ) বুলীয় বীজগণিতে  $(x+y)' + (x+y)'$

(অ)  $y$  (আ)  $x$  (ই)  $x'$  (ঈ)  $xy$ -এর সাথে সমান।

বিভাগ - খ

### Differential Calculus II

(ইউনিট - ১)

(মান : ১৫)

যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

২। অনুক্রম  $\left\{\frac{4n+3}{3n+4}\right\}$ -এর জন্য দেখাও তা —

(ক) ক্রমবর্ধমান কিনা

(খ) উপরে নাকি নিচে সীমাবদ্ধ

(গ) অভিসারী কিনা, যুক্তি সহকারে।

২+২+১

৩। (ক) ব্যাখ্যা করো : অলটারনেটিং শ্রেণি (Alternating series)

(খ)  $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$  শ্রেণিটির অভিসারীত্ব পরীক্ষা করো।

২+৩

৪। (ক) Rolle-এর উপপাদ্যটি বিবৃত করো।

(খ) 'a'-এর মান বের করো যাতে  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^x - x}{x^2}$ -এর অস্তিত্ব সসীম (exists finitely) হয় এবং এর সীমা (limit) নির্ণয় করো।

২+৩

৫। x-এর মান নির্ণয় করো, যেখানে  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ -এর চরম অথবা অবম মান থাকবে এবং যদি থাকে সেই মানগুলো নির্ণয় করো।

৩+২

৬। Lagrange-র 'অনির্ধারিত গুণক'-এর সাহায্যে  $S = 2(xy + yz + zx)$ -এর প্রান্তিক বিন্দু নির্ণয় করো, যেখানে  $xyz = a^3$ ; অতঃপর ওই বিন্দুতে S-এর চরম বা অবম মান নির্ণয় করো।

৫

বিভাগ - গ

### Differential Equation II

(ইউনিট - ২)

(মান : ৫)

যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

৭।  $\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0$  অবকল সমীকরণের আইগেন মানসমূহ এবং আইগেন অপেক্ষকগুলি নির্ণয় করো, যেখানে  $y(0) = 0, y(a) = 0, \lambda, a > 0$ ।

৫

৮। Lagrange-র পদ্ধতি দ্বারা সমাধান করো :

$py + qx = xyz^2(x^2 - y^2)$ , where  $p = \frac{\partial z}{\partial x}$  and  $q = \frac{\partial z}{\partial y}$

৫

বিভাগ - ঘ

### Vector Algebra

(ইউনিট - ৩)

(মান : ৫)

যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

৯। ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ করো যে, যে-কোনো ত্রিভুজ  $\Delta ABC$ -এর ক্ষেত্রে  $c = a \cos B + b \cos A$ , যেখানে চিহ্নগুলি প্রচলিত অর্থবহ।

৫

১০। প্রবল বল  $4\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$  এবং  $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$  দ্বারা  $\hat{i} + 2\hat{j}$  বিন্দু থেকে  $2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$  বিন্দুতে একটি কণার সরণ ঘটে। বলগুলি দ্বারা কার্যের পরিমাপ করো।

৫

Please Turn Over

বিভাগ - ঙ

## Discrete Mathematics

(ইউনিট - ৪)

(মান : ৩০)

যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

১১। (ক) প্রত্যেক পূর্ণসংখ্যা  $n \geq 1$ -এর জন্য প্রমাণ করো,  $10^n + 10^{n-1} + 1$  সংখ্যাটি ৩ দ্বারা বিভাজ্য।(খ) যদি  $d | a$  এবং  $d | c$ , যেখানে  $a, c, d$  ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, তবে প্রমাণ করো যে,  $\gcd\left(\frac{a}{d}, \frac{c}{d}\right) = \frac{1}{d} \gcd(a, c)$ । ৫+৫১২। (ক) যদি  $n$  একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং  $n^3 + 1$  একটি মৌলিক সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ করো যে,  $n = 1$ ।

(খ) নিম্নলিখিত congruence-গুলির সমস্ত সাধারণ সমাধান নির্ণয় করো :

$$x \equiv 2 \pmod{3}$$

$$x \equiv 3 \pmod{4}$$

$$x \equiv 4 \pmod{5}$$

৫+৫

১৩। (ক) যখন  $2^{18} + 9^{18}$ -কে ১৭ দিয়ে ভাগ করা হয়, তখন Fermat's little theorem ব্যবহার করে ভাগশেষ নির্ণয় করো।

(খ) কোন বস্তুর জন্য প্রদত্ত UPC-টি সঠিক কিনা বলো : 8901030114519

৫+৫

১৪। (ক) ছয় সদস্যের একটি Round-Robin tournament গঠন করো।

(খ)  $(x + y + z)(xy + x'z)$  বুলীয় অপেক্ষকটিকে Disjunctive Normal Form (DNF)-এ রূপান্তরিত করো $x, y, z$  চলরাশিগুলির জন্য।

৫+৫

১৫। (ক) Wilson-এর উপপাদ্যটি লেখো।

 $\phi(260)$  বের করো।

(খ) একটি লজিক বতনী নির্মাণ করো যেটি এই সত্যসারণিকে সিদ্ধ করে :

(২+৩)+৫

A	B	C	E
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

## [English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

## Group – A

(Marks : 10)

1. Choose the correct alternative :

1×10

(a) The greatest lower bound of the sequence  $\left\{\frac{1}{n}\right\}$  is(i)  $\infty$  (ii) 1 (iii) 0 (iv) None of these.(b) The series  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ 

(i) is convergent (ii) is divergent (iii) oscillates finitely (iv) oscillates infinitely.

(c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} =$ (i)  $\infty$  (ii) 0 (iii) 1 (iv) undefined.(d) The complementary function (C.F.) of the differential equation  $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = e^{4x}$  is(i)  $C_1e^{-2x} + C_2e^{3x}$ (ii)  $C_1e^{2x} + C_2e^{-3x}$ (iii)  $C_1e^{6x} + C_2e^{-x}$ 

(iv) None of these.

(e) The partial differential equation formed by eliminating the arbitrary constants  $a$  and  $b$  from the function  $z = (x + a)(y + b)$  is(i)  $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (ii)  $Z = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}$ (iii)  $Z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$ 

(iv) None of these.

(f) If the vectors  $(a\hat{i} + 6\hat{j} + 9\hat{k})$  and  $(-5\hat{i} + 2\hat{j} + b\hat{k})$  be collinear, then(i)  $a = b = 1$ (ii)  $a = -15, b = 3$ (iii)  $a = 3, b = 9$ 

(iv) None of these.

Please Turn Over

(g) The angle between the vectors  $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$  and  $\vec{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$  is

- (i) 0 (ii)  $\frac{\pi}{3}$   
 (iii)  $\frac{\pi}{4}$  (iv) None of these.

(h) When  $7^{30}$  is divided by 4, the remainder will be

- (i) 0 (ii) 1 (iii) 2 (iv) None of these.

(i) The Diophantine equation  $9x + 6y = 1$  has

- (i) only one solution (ii) two solutions  
 (iii) no solutions (iv) None of these.

(j) In a Boolean Algebra  $(x+y)' + (x+y)'$  is equal to

- (i)  $y$  (ii)  $x$  (iii)  $x'$  (iv)  $xy$ .

**Group – B**

**Differential Calculus II**

(Unit – 1)

(Marks : 15)

Answer *any three* questions.

2. Consider the sequence  $\left\{\frac{4n+3}{3n+4}\right\}$ . Examine —

- (a) whether it is monotonic increasing or decreasing  
 (b) whether it is bounded above or below  
 (c) state whether it is convergent with justification.

2+2+1

3. (a) Define a Alternating series.

(b) Examine the convergence of the series

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

2+3

4. (a) State Rolle's theorem.

(b) Find the value of 'a' so that  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^x - x}{x^2}$  exists finitely and also find the limit.

2+3

5. Find at what values of  $x$  the function  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$  has maxima or minima and find the corresponding maxima or minima of the function, if exists.

3+2

6. Using the Lagrange's Method of undetermined multiplier, find the stationary point of  $S = 2(xy + yz + zx)$  subject to  $xyz = a^3$ . Also find the maximum or minimum value of  $S$  at this point. 5

**Group – C****Differential Equation II****(Unit – 2)****(Marks : 5)**Answer *any one* question.

7. Find the eigen values and eigen functions of the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, y(0) = 0, y(a) = 0, \lambda, a > 0. \quad 5$$

8. Solve by Lagrange's method :

$$py + qx = xyz^2(x^2 - y^2), \text{ where } p = \frac{\partial z}{\partial x} \text{ and } q = \frac{\partial z}{\partial y} \quad 5$$

**Group – D****Vector Algebra****(Unit – 3)****(Marks : 5)**Answer *any one* question.

9. Prove (by vector method) that in any triangle  $\Delta ABC$ ,  $c = a \cos B + b \cos A$ , symbols having usual meanings. 5
10. A particle, acted on by constant forces  $4\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$  and  $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$  is displaced from the point  $\hat{i} + 2\hat{j}$  to  $2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ . Find the work done by the forces. 5

**Group – E****Discrete Mathematics****(Unit – 4)****(Marks : 30)**Answer *any three* questions.

11. (a) Prove that 3 divides  $10^n + 10^{n-1} + 1$ , for all natural numbers  $n \geq 1$ .

(b) If  $d | a$  and  $d | c$ , where  $a, c, d$  are positive integers, then prove that  $\gcd\left(\frac{a}{d}, \frac{c}{d}\right) = \frac{1}{d} \gcd(a, c)$ . 5+5

**Please Turn Over**

12. (a) If  $n$  is a positive integer such that  $n^3 + 1$  is a prime number, then prove that  $n = 1$ .

(b) Solve the following system of congruences :

$$x \equiv 2 \pmod{3}$$

$$x \equiv 3 \pmod{4}$$

$$x \equiv 4 \pmod{5}$$

5+5

13. (a) Using Fermat's little theorem, find the remainder when  $2^{18} + 9^{18}$  is divided by 17.

(b) Is 8901030114519 a correct UPC for some product?

5+5

14. (a) Find a Round-Robin tournament schedule for 6 teams.

(b) Express the Boolean expression  $(x + y + z)(xy + x'z)$  in DNF in the variables  $x, y, z$ .

5+5

15. (a) State Wilson's theorem.

Find  $\phi(260)$ .

(b) Construct a logic circuit which would satisfy the truth table :

A	B	C	E
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

(2+3)+5