2022

MATHEMATICS — GENERAL

Paper : GE/CC-1

Full Marks : 65

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

১নং প্রশ্ন এবং প্রতিটি **ইউনিট** থেকে কমপক্ষে ***একটি*** করে প্রশ্ন নিয়ে আরো ***নয়টি*** প্রশ্নের উত্তর দাও।

১। নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির মধ্যে সঠিক উত্তরটি যথাযথ যুক্তিসহ নির্বাচন করো ঃ ২×১০

(ক) i^i-এর মুখ্য মানটি হল

(অ) $e^{-(4n+1)\frac{\pi}{2}}$, n একটি পূর্ণসংখ্যা (আ) $e^{-\pi}$

(ই) e^{π} (ঈ) $e^{-\pi/2}$

(খ) যদি $x^3+px^2+qx+r=0$ সমীকরণটির তিনটি বীজ α, $-\alpha$ এবং β হয়, তাহলে α^2-এর মান হবে

(অ) $\frac{r}{p}$ (আ) $-\frac{r}{p}$

(ই) $\frac{p}{r}$ (ঈ) $-\frac{p}{r}$

(গ) যদি নীচের সমসত্ত্ব সমীকরণগুলির সিস্টেমের একটি অশূন্য (nontrivial) সমাধান থাকে ঃ

$$x+\lambda y+2z=0,\ 3x+2\lambda y+z=0,\ 2x+3y-4z=0,$$

তাহলে λ-এর মান হবে

(অ) 0 (আ) 15

(ই) $\frac{15}{2}$ (ঈ) $-\frac{15}{2}$

(ঘ) নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির মধ্যে কোন্‌টি $x=0$-তে সন্তত (continuous)?

(অ) $f(x)=\frac{1}{x}$ (আ) $f(x)=\frac{|x|}{x}$

(ই) $f(x)=|x|$ (ঈ) $f(x)=\frac{x}{|x|}$

(ঙ) $f(x) = \log_e \frac{1-x}{1+x}$ অপেক্ষকটির সংজ্ঞায়িত হওয়ার অঞ্চল হল

(অ) $(-1, 1)$ (আ) $[-1, 1]$

(ই) $(0, 1)$ (ঈ) $[0, 1]$

(চ) যদি $2x = 9$ সরলরেখাটি $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1$ উপবৃত্তটির সাপেক্ষে $(2, 0)$ বিন্দুটির Polar হয়, তবে a-এর মান হল

(অ) 1 (আ) 2

(ই) 3 (ঈ) 4

(ছ) সমীকরণ $12x^2 - 7xy - 12y^2 = 0$ প্রতিনিধিত্ব করে দুটি

(অ) সমান্তরাল সরলরেখা (আ) coincident সরলরেখা

(ই) লম্ব সরলরেখা (ঈ) কোনোটিই নয়।

(জ) $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ এই গোলকটির $(6, -3, -2)$ বিন্দুতে স্পর্শক তলটির সমীকরণ হল

(অ) $x - 3y - 2z = 49$ (আ) $6x - 3y + 2z = 49$

(ই) $6x - 3y - 2z = 49$ (ঈ) $x + 4y + 3z = 49$

(ঝ) $y = e^{-x}(A\cos x + B\sin x)$, A, B ধ্রুবক এই বক্রগুলির অবকল সমীকরণটি হল

(অ) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ (আ) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 2y = 0$

(ই) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ (ঈ) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 2y = 0$

(ঞ) যদি $u(x, y) = \tan^{-1}\frac{x^3 + y^3}{x - y}, x \neq y$; তাহলে $x\frac{\partial u}{\partial y} + y\frac{\partial u}{\partial x}$ -এর মান হবে

(অ) $\sin u$ (আ) $\cos u$

(ই) $\sin 2u$ (ঈ) $\cos 2u$

ইউনিট - ১

(Algebra - I)

২। (ক) যদি n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ করো যে, $(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\left(\frac{n}{2}+1\right)} \cos\frac{n\pi}{4}$ ।

(খ) $\log \sin(\theta + i\phi) = \alpha + i\beta$, যেখানে $\theta, \phi, \alpha, \beta$ সবাই বাস্তব, প্রমাণ করো যে, $2\cos 2\theta = e^{2\phi} + e^{-2\phi} - 4e^{2\alpha}$ । ২+৩

৩। ম্যাট্রিক্স পদ্ধতিতে সমাধান করো ঃ ৫

$$x+y+z=8$$
$$x-y+2z=6$$
$$3x+5y-7z=14$$

৪। যদি $x^3-2x^2+4x-5=0$ সমীকরণটির তিনটি বীজ α, β, γ হয়, তবে সেই সমীকরণটি নির্ণয় করো যার বীজ তিনটি হল $\frac{\alpha}{\beta+\gamma}, \frac{\beta}{\gamma+\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha+\beta}$। ৫

ইউনিট - ২

(Differential Calculus - I)

৫। (ক) $f(x)$ অপেক্ষকটি [0, 2] interval-এ নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2+x+1, \quad 0 \le x < 1 \\ &= 2x+1, \quad 1 \le x \le 2 \end{aligned}$$

f; $x=1$-তে সন্তত (continuous) কি না পরীক্ষা করো।

(খ) $\lim_{x\to\pi/2} \frac{e^{\tan x}-1}{e^{\tan x}+1}$-এর অস্তিত্ব আছে কি না পরীক্ষা করো। ২+৩

৬। দুটি অপেক্ষকের গুণফলের nth derivative সংক্রান্ত লিবনিজ উপপাদ্যটি বিবৃত করো। এর সাহায্যে প্রমাণ করো যে, যদি $y=e^{\tan^{-1}x}$ হয়, তবে $(1+x^2)y_{n+2}+(2nx+x-1)y_{n+1}+n(n+1)y_n=0$ । ১+৪

৭। (ক) দুই চলবিশিষ্ট Homogeneous অপেক্ষকের উপর Euler-এর উপপাদ্যটি বিবৃত করো।

(খ) যদি $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \left(x^2+y^2+z^2\right)\neq 0$ হয়, তবে দেখাও যে $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ । ১+৪

৮। প্রমাণ করো যে $y=c\cosh{x/c}$ -এই বক্রের উপর কোনো বিন্দুতে radius of curvature, ordinate-এর বর্গের সাথে সরল ভেদে আছে। ৫

৯। $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ সরলরেখাসমূহের এনভেলাপ নির্ণয় করো, যেখানে $a+b=c$ (c একটি ধ্রুবক, a, b পরিবর্তনশীল ধ্রুবক)। ৫

ইউনিট - ৩

(Differential Equation - I)

১০। (ক) $\left(y^2 e^{xy^2}+4x^3\right)dx+\left(2xye^{xy^2}-3y^2\right)dy=0$ অবকল সমীকরণটি Exact কি না পরীক্ষা করো।

(খ) সমাধান করো ঃ $x\,dx+y\,dy+\dfrac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=0$ । ২+৩

১১। $y=px+\sqrt{1+p^2}$ -এর সাধারণ এবং একক (singular) সমাধান নির্ণয় করো। ৫

১২। সমাধান করো ঃ $\dfrac{d^2y}{dx^2}+6\dfrac{dy}{dx}+9y=24e^{-3x}$ । ৫

ইউনিট - ৪

(Coordinate Geometry)

১৩। $6x^2-5xy-6y^2+14x+5y+4=0$ সমীকরণটিকে তার canonical রূপে পরিবর্তিত করো এবং সেখান থেকে কণিকটির প্রকৃতি (nature) নির্ণয় করো। ৫

১৪। $r\cos(\theta-\alpha)=p$ সরলরেখাটি যদি $\dfrac{l}{r}=1+e\cos\theta$ কণিকটিকে স্পর্শ করে তবে দেখাও যে, $(l\cos\alpha+ep)^2+l^2\sin^2\alpha=p^2$ । ৫

১৫। যদি $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ সমীকরণটি মূলবিন্দু থেকে সমদূরত্বে অবস্থিত দুটি সরলরেখাকে প্রকাশ করে তবে দেখাও যে, $f^4-g^4=c(bf^2-ag^2)$। ৫

১৬। একটি লম্ব বৃত্তীয় কোণের সমীকরণ নির্ণয় করো, যার শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দুতে অবস্থিত, যার অক্ষ z-অক্ষ, এবং $(3,-4,6)$ বিন্দুগামী। ৫

১৭। $x^2+y^2+z^2-2y-6z+5=0$ গোলকটির দুটি স্পর্শক তল (tangent plane)-এর সমীকরণ নির্ণয় করো যারা $2x+2y-z=0$ এই তলটির সাথে সমান্তরাল। ৫

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

Answer ***question no.*** **1** and ***any nine*** questions from the rest, taking at least ***one*** question from ***each unit***.

1. Choose the correct option from each of the following questions with proper justification : 2×10

(a) The principal value of i^i will be

(i) $e^{-(4n+1)\frac{\pi}{2}}$, n being an integer (ii) $e^{-\pi}$

(iii) e^{π} (iv) $e^{-\pi/2}$.

(b) If α, $-\alpha$ and β be the roots of the equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, then the value of α^2 will be

(i) $\frac{r}{p}$ (ii) $-\frac{r}{p}$

(iii) $\frac{p}{r}$ (iv) $-\frac{p}{r}$.

(c) If the system of homogeneous equations possesses a non-trivial solution :

$$x + \lambda y + 2z = 0,\ 3x + 2\lambda y + z = 0,\ 2x + 3y - 4z = 0,$$

then the value of λ will be

(i) 0 (ii) 15

(iii) $\frac{15}{2}$ (iv) $-\frac{15}{2}$.

(d) Which of the following function is continuous at $x = 0$?

(i) $f(x) = \frac{1}{x}$ (ii) $f(x) = \frac{|x|}{x}$

(iii) $f(x) = |x|$ (iv) $f(x) = \frac{x}{|x|}$.

(e) The domain of definition of the function $f(x) = \log_e \frac{1-x}{1+x}$ is

(i) $(-1, 1)$ (ii) $[-1, 1]$

(iii) $(0, 1)$ (iv) $[0, 1]$.

(f) If $2x = 9$ is the equation of polar of the point $(2, 0)$ with respect to the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1$, then the value of a is,

(i) 1 (ii) 2

(iii) 3 (iv) 4.

(g) $12x^2 - 7xy - 12y^2 = 0$ represents a pair of

(i) parallel straight lines (ii) coincident straight lines

(iii) perpendicular straight lines (iv) none of these.

(h) Equation of the tangent plane to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ at the point $(6, -3, -2)$ is

(i) $x - 3y - 2z = 49$ (ii) $6x - 3y + 2z = 49$

(iii) $6x - 3y - 2z = 49$ (iv) $x + 4y + 3z = 49$.

(i) The differential equation of family of curves $y = e^{-x}(A\cos x + B\sin x)$, where A, B are arbitrary constants is

(i) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ (ii) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 2y = 0$

(iii) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ (iv) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 2y = 0$.

(j) If $u(x, y) = \tan^{-1}\frac{x^3 + y^3}{x - y}, x \neq y$; then the value of $x\frac{\partial u}{\partial y} + y\frac{\partial u}{\partial x}$ is

(i) $\sin u$ (ii) $\cos u$

(iii) $\sin 2u$ (iv) $\cos 2u$.

Unit - 1

(Algebra - I)

2. (a) If n be a positive integer, prove that $(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\cos\frac{n\pi}{4}$.

(b) If $\log\sin(\theta + i\phi) = \alpha + i\beta$, where $\theta, \phi, \alpha, \beta$ are reals, prove that $2\cos 2\theta = e^{2\phi} + e^{-2\phi} - 4e^{2\alpha}$. 2+3

3. Solve by matrix method : 5

$$x + y + z = 8$$
$$x - y + 2z = 6$$
$$3x + 5y - 7z = 14$$

4. If α, β, γ are roots of the equation $x^3 - 2x^2 + 4x - 5 = 0$, then find the equation whose roots are $\frac{\alpha}{\beta+\gamma}, \frac{\beta}{\gamma+\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha+\beta}$. 5

Unit - 2

(Differential Calculus - I)

5. (a) A function $f(x)$ is defined on $[0, 2]$ by

$$f(x) = x^2 + x + 1, \quad 0 \le x < 1$$
$$= 2x + 1, \quad 1 \le x \le 2$$

Examine if f is continuous at $x = 1$.

(b) Does the $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{e^{\tan x} - 1}{e^{\tan x} + 1}$ exists? Examine. 2+3

6. State Leibnitz's theorem for the nth derivative of the product of two functions. Use it to prove that if $y = e^{\tan^{-1} x}$, then $(1 + x^2) y_{n+2} + (2nx + x - 1) y_{n+1} + n(n+1) y_n = 0$. 1+4

7. (a) State Euler's theorem on homogeneous function of two variables.

(b) If $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, (x^2 + y^2 + z^2) \ne 0$, then show that $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$. 1+4

8. Prove that the radius of curvature at any point of the curve $y = c \cosh x/c$ varies as the square of the ordinate. 5

9. Find the envelope of the lines $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, where $a + b = c$ (c is constant and a, b are parameters). 5

Unit - 3

(Differential Equation - I)

10. (a) Test whether $\left(y^2 e^{xy^2} + 4x^3\right) dx + \left(2xy e^{xy^2} - 3y^2\right) dy = 0$ is an exact differential equation.

(b) Solve : $x\,dx + y\,dy + \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = 0$. 2+3

11. Find the general and singular solution of $y = px + \sqrt{1 + p^2}$. 5

12. Solve : $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + 6 \dfrac{dy}{dx} + 9y = 24 e^{-3x}$. 5

Unit - 4

(Coordinate Geometry)

13. Reduce the equation $6x^2 - 5xy - 6y^2 + 14x + 5y + 4 = 0$ to its canonical form and hence determine the nature of the conic. 5

14. If the straight line $r\cos(\theta - \alpha) = p$ touches the conic $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$, then show that $(l\cos\alpha + ep)^2 + l^2\sin^2\alpha = p^2$. 5

15. If $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ represents two straight lines equidistant from the origin, then show that $f^4 - g^4 = c(bf^2 - ag^2)$. 5

16. Find the equation of the right circular cone whose vertex is at the origin, axis is the z-axis and which passes through the point $(3, -4, 6)$. 5

17. Find the equations of the two tangent planes to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 6z + 5 = 0$ which are parallel to the plane $2x + 2y - z = 0$. 5