(12)

P(1st Sm.)-Mathematics-G/(GE/CC-1)/CBCS

2019

MATHEMATICS — GENERAL

Paper : GE/CC–1

Full Marks : 65

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

১নং প্রশ্ন এবং ***যে-কোনো নয়টি*** প্রশ্নের উত্তর দাও, ***প্রতিটি ইউনিট*** থেকে কমপক্ষে ***একটি*** করে নিয়ে।

১। নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির মধ্যে থেকে সঠিক উত্তরটি নির্বাচন করো ঃ ২×১০

(ক) $(\sin\theta + i\cos\theta)^n$, $n \in Z$ -এর মান

(অ) $\sin n\theta + i\cos n\theta$ (আ) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - n\theta\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{2} - n\theta\right)$

(ই) $\cos n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ (ঈ) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - n\theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - n\theta\right)$.

(খ) $2x^3 + 13x^2 + x - 70$ কে $(x - 2)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে

(অ) 2 (আ) – 2

(ই) 0 (ঈ) – 70.

(গ) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{e^{1/x}+1}$ এর মান হল

(অ) 0 (আ) 1

(ই) অস্তিত্ব নেই (ঈ) অস্তিত্ব আছে কিন্তু 0 এবং 1 নয়।

(ঘ) $f(x) = \frac{3x^2+4x}{5x}$, যখন $x \neq 0$, $f(0) = \frac{a}{5}$, এবং f অপেক্ষকটি সর্বত্র সন্তত হলে 'a'-এর মান কত?

(অ) 5 (আ) 4

(ই) $\frac{4}{5}$ (ঈ) $\frac{5}{4}$.

(ঙ) যদি $u(x, y) = \frac{x^{5/2} + y^{5/2}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ হয়, তবে $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$ সমান হল

(অ) $2u$ (আ) $\frac{5}{2}u$

(ই) u^2 (ঈ) u.

(চ) $\cos^2 x\frac{dy}{dx} + y = \tan x$ -এই অবকল সমীকরণটির সমাকল গুণকটি হল

(অ) $\tan x$ (আ) $e^{\tan x}$

(ই) $e^{\sec^2 x}$ (ঈ) $e^{\sec x}$.

(ছ) $\sqrt{\frac{dy}{dx}\sqrt{\frac{d^3y}{dx^3}}} = 4$ অবকল সমীকরণটির মাত্রা (degree) হল

(অ) 1 (আ) 2

(ই) 3 (ঈ) 4.

(জ) একটি সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ পরস্পরছেদী সরলরেখা হবে যদি

(অ) $\Delta \neq 0$ (আ) $\Delta = 0, D = 0$

(ই) $\Delta \neq 0, D \neq 0$ (ঈ) $\Delta = 0, D \neq 0$.

(ঝ) $3x^2 - 10xy + 3y^2 = 0$ সরলরেখা যুগলের মধ্যবর্তী কোণ (angle) হল

(অ) $\sin^{-1}\frac{4}{3}$ (আ) $\cos^{-1}\frac{4}{3}$

(ই) $\tan^{-1}\frac{4}{3}$ (ঈ) $\tan^{-1}\frac{4}{5}$.

(ঞ) $r = \frac{1}{4 - 5\cos\theta}$ কণিকটি (conic) একটি

(অ) বৃত্ত (আ) অধিবৃত্ত

(ই) উপবৃত্ত (ঈ) পরাবৃত্ত।

Unit – I

(Algebra - 1)

২। (ক) দেখাও যে $\tan\left(i\log\frac{a-ib}{a+ib}\right) = \frac{2ab}{a^2-b^2}$.

(খ) দেখাও যে $x^7 - 2x^4 + 3x^3 - 1 = 0$-এই সমীকরণটির কমপক্ষে চারটি কাল্পনিক বীজ আছে। ২+৩

৩। λ এবং μ-এর কোন্ কোন্ মানের জন্য

$x + y + z = 6,\ x + 2y + 3z = 10,\ x + 2y + \lambda z = \mu$ সমীকরণ সমূহের—

(ক) কোনো সমাধান থাকবে না,

(খ) একটি মাত্র সমাধান থাকবে,

(গ) অসংখ্য সমাধান থাকবে। ৫

৪। Cardan-এর পদ্ধতির সাহায্যে সমাধান করো ঃ $x^3 + 12x - 12 = 0$. ৫

Unit – II

(Differential Calculus – I)

৫। (ক) নির্ণয় করো ঃ $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x+3}{x^2+x+2}\right)^x$

(খ) যদি $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), x \neq 0$

$= 0 \quad , x = 0$

হয়, তবে দেখাও f, $x = 0$-তে সন্তত। ৩+২

৬। (ক) যদি $y = 2\cos x\ (\sin x - \cos x)$ হয়, তবে দেখাও $(y_{10})_0 = 2^{10}$.

(খ) যদি $y = x^2 e^x \cos x$ হয়, তবে y_n এর মান নির্ণয় করো। ৩+২

৭। যদি $u = \cos^{-1}\left\{\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right\}$ হয়, তবে দেখাও $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2}\cot u$ এবং এর থেকে

$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ এর মান নির্ণয় করো। ৫

৮। $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 + 2xy + 2y^2 - 3x + y = 0$ এর সমস্ত স্পর্শপ্রবণ রেখাগুলি নির্ণয় করো। ৫

৯। $y = \sin x + \cos 2x$-এর চরম এবং অবম মান নির্ণয় করো। ৫

Unit – III

(Differential Equation – I)

১০। (ক) $y = a\cos 2x + b\sin 2x$ সমীকরণ থেকে অবকল সমীকরণটি নির্ণয় করো, যেখানে a, b হল দুটি Parameter।

(খ) সমাধান করো ঃ $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{3x+3y+1}$ ২+৩

Please Turn Over

১১। $y = px + p - p^2$, যেখানে $p = \frac{dy}{dx}$, সমীকরণটির সাধারণ ও বিশিষ্ট সমাধান নির্ণয় করো। ৫

১২। Undetermined coefficient-এর মাধ্যমে সমাধান করো ঃ $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 6e^{2x}$. ৫

Unit – IV

(Co-ordinate Geometry)

১৩। $r\cos(\theta - \alpha) = p$ সরলরেখাটি $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ কণিকটিকে স্পর্শ করলে প্রমাণ করো যে

$(l\cos\alpha - ep)^2 + l^2\sin^2\alpha = p^2$. ৫

১৪। প্রমাণ করো যে $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ এবং $lx + my = 1$ সরলরেখাগুলি দ্বারা নির্মিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলটি হল

$\frac{\sqrt{h^2 - ab}}{\left(am^2 - 2hlm + bl^2\right)}$. ৫

১৫। $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4x - 4y - 4 = 0$ সমীকরণটিকে তার canonical রূপে পরিবর্তিত করো এবং সেখান থেকে কণিকটির প্রকৃতি (nature) নির্ণয় করো। ৫

১৬। এমন একটি গোলকের সমীকরণ নির্ণয় করো যাতে $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 2z + 5 = 0$ এবং $x - 2y + 3z + 1 = 0$ বৃত্ত দুইটি ঐ গোলকের একটি Great Circle হয়। ৫

১৭। যদি $y^2 = 4ax$-এর সাপেক্ষে (α, β) বিন্দুটির পোলার $x^2 = 4by$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে, তবে (α, β)-এর সঞ্চারপথ নির্ণয় করো। ৫

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

Answer ***question no.*** **1** and ***any nine*** from the rest, taking at least ***one*** question from each **Unit**.

1. Choose the correct option from each of the following questions : 2×10

(a) The value of $(\sin\theta + i\cos\theta)^n, n \in Z$ is

(i) $\sin n\theta + i\cos n\theta$

(ii) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - n\theta\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{2} - n\theta\right)$

(iii) $\cos n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

(iv) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - n\theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - n\theta\right)$.

(b) When $2x^3 + 13x^2 + x - 70$ is divided by $(x - 2)$, the remainder will be

(i) 2 (ii) -2

(iii) 0 (iv) -70.

(c) The value of the limit, $\lim_{x\to 0} \frac{1}{e^{1/x}+1}$ is

(i) 0 (ii) 1

(iii) does not exist (iv) exists but not 0 or 1.

(d) If $f(x) = \frac{3x^2+4x}{5x}$ when $x \neq 0$, $f(0) = \frac{a}{5}$ and f is continuous everywhere, then the value of 'a' is

(i) 5 (ii) 4

(iii) $\frac{4}{5}$ (iv) $\frac{5}{4}$.

(e) If $u(x, y) = \frac{x^{5/2}+y^{5/2}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$, then $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$ is equal to

(i) $2u$ (ii) $\frac{5}{2}u$

(iii) u^2 (iv) u.

(f) The integrating factor of $\cos^2 x\frac{dy}{dx} + y = \tan x$ is

(i) $\tan x$ (ii) $e^{\tan x}$

(iii) $e^{\sec^2 x}$ (iv) $e^{\sec x}$.

(g) The degree of the differential equation $\sqrt{\frac{dy}{dx}\sqrt{\frac{d^3y}{dx^3}}} = 4$ is

(i) 1 (ii) 2

(iii) 3 (iv) 4.

(h) Condition that a general equation of second degree represent a pair of intersecting straight line is

(i) $\Delta \neq 0$ (ii) $\Delta = 0$, $D = 0$

(iii) $\Delta \neq 0$, $D \neq 0$ (iv) $\Delta = 0$, $D \neq 0$.

(i) The angle between the pair of straight lines $3x^2 - 10xy + 3y^2 = 0$ is

(i) $\sin^{-1}\frac{4}{3}$ (ii) $\cos^{-1}\frac{4}{3}$

(iii) $\tan^{-1}\frac{4}{3}$ (iv) $\tan^{-1}\frac{4}{5}$.

(j) The conic $r = \frac{1}{4-5\cos\theta}$ represents a

(i) circle (ii) parabola

(iii) ellipse (iv) hyperbola.

Unit – I

(Algebra - 1)

2. (a) Show that $\tan\left(i\log\frac{a-ib}{a+ib}\right) = \frac{2ab}{a^2-b^2}$.

(b) Show that the equation $x^7 - 2x^4 + 3x^3 - 1 = 0$ has at least four imaginary roots. 2+3

3. Investigate for what values of λ and μ, the following equations $x + y + z = 6$, $x + 2y + 3z = 10$, $x + 2y + \lambda z = \mu$ have

(a) no solution,

(b) a unique solution,

(c) an infinite solution. 5

4. Solve by Cardan's method : $x^3 + 12x - 12 = 0$. 5

Unit – II

(Differential Calculus – I)

5. (a) Find $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x+3}{x^2+x+2}\right)^x$.

(b) Let $f(x) = x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right), x \neq 0$

$= 0 \quad , x = 0$

Show that f is continuous at $x = 0$. 3+2

6. (a) If $y = 2\cos x\,(\sin x - \cos x)$, show that $(y_{10})_0 = 2^{10}$.

(b) Find y_n, if $y = x^2e^x\cos x$. 3+2

7. If $u = \cos^{-1}\left\{\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right\}$, show that $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2}\cot u$. Hence determine $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

5

8. Find all the asymptotes of $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 + 2xy + 2y^2 - 3x + y = 0$. 5

9. Examine the maximum and minimum values of $y = \sin x + \cos 2x$. 5

Unit – III

(Differential Equation – I)

10. (a) Find the differential equation from the equation $y = a \cos 2x + b \sin 2x$, where a and b are two parameters.

    (b) Solve : $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 1}{3x + 3y + 1}$ 2+3

11. Find the general and singular solution of $y = px + p - p^2$, $p = \frac{dy}{dx}$. 5

12. Solve by the method of undetermined coefficient $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 6e^{2x}$. 5

Unit – IV

(Co-ordinate Geometry)

13. If the straight line $r\cos(\theta - \alpha) = p$ touches the conic $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$, then prove that

    $(l\cos\alpha - ep)^2 + l^2 \sin^2\alpha = p^2$. 5

14. Show that the area of the triangle formed by the straight lines $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ and $lx + my = 1$ is

    $\frac{\sqrt{h^2 - ab}}{\left(am^2 - 2hlm + bl^2\right)}$. 5

15. Reduce the equation $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4x - 4y - 4 = 0$ to its canonical form and hence find the nature of the conic. 5

16. Obtain the equation of the sphere having the circle

    $$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 2z + 5 = 0,\ x - 2y + 3z + 1 = 0$$

    as a great circle. 5

17. If the polar of (α, β) with respect to parabola $y^2 = 4ax$ touch the parabola $x^2 = 4by$, find the locus of (α, β). 5