2022

MATHEMATICS — GENERAL

Paper : DSE-B-1

(Advanced Calculus)

Full Marks : 65

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

$\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ denote the set of real numbers and the set of natural numbers respectively.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

১। সঠিক উত্তরটি লেখো ঃ ১×১০

(ক) মনে করো, $f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx}$, $0\le x<\infty$, যেখানে $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, তাহলে $\{f_n\}_n$ অপেক্ষকের অনুক্রমটি

(অ) 0-তে সমভাবে অভিসারিত হবে (আ) 0-তে সমভাবে অভিসারিত হবে না

(ই) অপসারিত (ঈ) কোনোটিই নয়।

(খ) $f_n(x)=1-\dfrac{x^n}{n}$; $x\in[0,1]$; $n\in\mathbb{N}$ হলে $\{f_n\}_n$ অপেক্ষকের অনুক্রমটি

(অ) [0, 1] অন্তরালে সমভাবে অভিসারী

(আ) বিন্দু অনুযায়ী অভিসারী [0, 1] অন্তরালে, কিন্তু সমভাবে নয়

(ই) বিন্দু অনুযায়ী বা সমভাবে কোনোটিতেই অভিসারী নয়

(ঈ) কোনোটিই নয়।

(গ) $x+\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{x^3}{3^3}+\dfrac{x^4}{4^4}+\dots$, ঘাত শ্রেণীটির অভিসরণ ব্যাসার্ধ

(অ) e (আ) $\dfrac{1}{e}$

(ই) ∞ (ঈ) 0

(ঘ) $x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\dots$, ঘাত শ্রেণিটির অভিসরণ হবে ____________ মধ্যে।

(অ) $-1<x<1$ (আ) $-1\le x<1$

(ই) $-1<x\le 1$ (ঈ) $-1\le x\le 1$

(ঙ) $[-\pi, \pi]$ অন্তরালে যদি x-এর সমস্তমানের জন্য $f(x) = f(-x)$ হয়, $n = 1, 2, 3, \ldots$ তবে অপেক্ষকটির Fourier শ্রেণিটি হবে $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, যেখানে $b_n =$

(অ) -1 (আ) 0

(ই) 1 (ঈ) 2

(চ) $f_n = \dfrac{\sin nx}{nx}$; $x \in (0, 1)$; $n \in \mathbb{N}$ হলে $\{f_n\}_n$ অপেক্ষকের অনুক্রমটি

(অ) অভিসারী হবে $\forall x$ (আ) অপসারী হবে $\forall x$

(ই) অভিসারী হবে $\forall x$, ব্যতিক্রম $x = 0$ (ঈ) অপসারী $\forall x$, ব্যতিক্রম $x = 1$

(ছ) $L\{\cos at\}, t > 0$-এর মান হল

(অ) $\dfrac{a}{s^2 + a^2}, s > 0$ (আ) $\dfrac{s}{s^2 + a^2}, s > 0$

(ই) $\dfrac{a}{s^2 - a^2}, s > |a|$ (ঈ) $\dfrac{s}{s^2 - a^2}, s > |a|$

(জ) $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s\left(s^2 + 1\right)}\right\}$-এর মান হল

(অ) $1 + \cos t$ (আ) $1 - \sin t$

(ই) $1 + \sin t$ (ঈ) $1 - \cos t$

(ঝ) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ শ্রেণিটির অভিসারী ডোমেন হল

(অ) $0 < x < \infty$ (আ) $-\infty < x < 0$

(ই) $-\infty < x < \infty$ (ঈ) $-1 < x < 1$

(ঞ) $\{f_n\}_n$ অপেক্ষকের অনুক্রমটির অভিসারী ডোমেন কত, যেখানে $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}$?

(অ) $0 < x < \infty$ (আ) $-\infty < x < 0$

(ই) $-\infty < x < \infty$ (ঈ) $-1 < x < 1$

২। *যে-কোনো তিনটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ　৫×৩

(ক) $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots\ (-1 < x < 1)$ এই ঘাতশ্রেণী বিস্তৃতিটি ধরে নিয়ে $\log_e(1+x)$-এর ঘাতশ্রেণী নির্ণয় করো। অতঃপর দেখাও যে $\log_e 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$

(খ) ধরি, $f_n(x) = \frac{nx}{n+x}, x \in [0, a]$, যেখানে $a > 0$, দেখাও যে, $\{f_n\}_n$ অনুক্রমটি $[0, a]$ অন্তরালে সমভাবে অভিসারী।

(গ) $L^{-1}\left[\frac{1}{(p^2+1)(p-2)}\right]$ নির্ণয় করো।

(ঘ) $f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \le x < 0 \\ x, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$ Fourier শ্রেণীটি নির্ণয় করো।

(ঙ) $L\{f(t)\}$ নির্ণয় করো, যেখানে $f(t) = \begin{cases} e^t, & 0 < t \le 1 \\ t, & t > 1 \end{cases}$

৩। *যে-কোনো চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

(ক) (অ) অপেক্ষকের অনুক্রমের জন্য সমভাবে অভিসারী হওয়ার ক্ষেত্রে Cauchy-এর Condition-টি বিবৃত করো। $f_n(x) = x^n, x \in [0, a]$; for $0 < a < 1$, হলে দেখাও যে $\{f_n\}_n$ অপেক্ষকের অনুক্রমটি সমভাবে $[0, a]$ অন্তরালে অভিসারী হবে।

(আ) $f_n(x) = \frac{x}{x+n}; x \in [0, \infty)$ হলে দেখাও যে $\{f_n\}_n$ অপেক্ষকটির অনুক্রম $[0, \infty)$ অন্তরালে বিন্দু অনুযায়ী অভিসারী হবে কিন্তু সমভাবে অভিসারী হবে না।　(২+৩)+৫

(খ) (অ) অপেক্ষক শ্রেণীর সমভাবে অভিসারী হওয়ার জন্য Weierstrass-M-test-টি বিবৃত করো। দেখাও যে $(-\infty, \infty)$ অন্তরালে $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ শ্রেণিটি সমভাবে অভিসারী হবে।

(আ) দেখাও যে $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \log\left(1 + \frac{x}{n}\right); x \in [0, 1]$ একটি সন্তত অপেক্ষক $[0, 1]$ অন্তরালে।　(২+৩)+৫

(গ) (অ) ঘাতশ্রেণী সংক্রান্ত Abel-এর উপপাদ্যটি বিবৃত করো Limit form-এ।

(আ) $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots, |x| < 1$, এই বিস্তৃতি অনুযায়ী $\tan^{-1}x$-এর ঘাতশ্রেণিটি নির্ণয় করো। এর সাহায্যে দেখাও যে $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$　২+৫+৩

(ঘ) $f(x)=\begin{cases}(x-\pi)^2, & 0<x<\pi \\ \pi^2, & \pi<x<2\pi\end{cases}$ হলে $f(x)$ অপেক্ষকটির $(0, 2\pi)$ অন্তরালে Fourier শ্রেণিটি নির্ণয় করো। এর সাহায্যে

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ -এর মান নির্ণয় করো। ৭+৩

(ঙ) (অ) $F(t)=\begin{cases}e^t, & 0<t\le 1 \\ t, & t>1\end{cases}$ তাহলে $F(t)$ অপেক্ষকটির Laplace transform নির্ণয় করো।

(আ) $L[F(t)]=f(p)$ হলে প্রমাণ করো যে $L[F(at)]=\frac{1}{a}f\left(\frac{p}{a}\right)$। এর সাহায্যে $L[e^{-t}\cos t]$ -এর মান নির্ণয় করো। ৪+(৩+৩)

(চ) (অ) $F(t)=\frac{\cos\alpha t-\cos\beta t}{t}$ হলে, $F(t)$ অপেক্ষকটির Laplace transformation নির্ণয় করো।

(আ) Laplace transform ব্যবহার করে নিম্নলিখিত অবকল সমীকরণটির সমাধান করো ঃ ৫+৫

$$\frac{d^2y}{dt^2}+25y=10\cos 5t;\ y(0)=2,\ y'(0)=0$$

(ছ) (অ) $L^{-1}\left[\frac{1}{p^2(p+1)^2}\right]$-এর মান নির্ণয় করো।

(আ) Laplace transform-এর সাহায্যে অবকল সমীকরণটি সমাধান করো ঃ ৫+৫

$$\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y=4e^{-2t}\ ;\ y(0)=-1,\ y'(0)=4$$

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

1. Write the correct answer : 1×10

(a) For $n \in \mathbb{N}$, let $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be given by $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$, $0 \le x < \infty$, then the sequence of functions $\{f_n\}_n$

(i) uniformly converges to 0 (ii) not uniformly converges to 0

(iii) divergent (iv) none of these.

(b) The sequence of functions $\{f_n\}_n$ where $f_n(x) = 1 - \dfrac{x^n}{n}$; $x \in [0,1]$; $n \in \mathbb{N}$

(i) converges uniformly on [0, 1]

(ii) converges pointwise on [0, 1] but not uniformly convergent

(iii) is neither pointwise nor uniformly convergent

(iv) none of these.

(c) The radius of convergence of the power series $x + \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{x^3}{3^3} + \dfrac{x^4}{4^4} + \ldots$ is

(i) e (ii) $\dfrac{1}{e}$

(iii) ∞ (iv) 0.

(d) The power series $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots$ converges for

(i) $-1 < x < 1$ (ii) $-1 \le x < 1$

(iii) $-1 < x \le 1$ (iv) $-1 \le x \le 1$

(e) If $f(x) = f(-x)$ for all x in $[-\pi, \pi]$, for all $n = 1, 2, 3, \ldots$ the value of Fourier coefficient ($f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$), b_n is

(i) -1 (ii) 0

(iii) 1 (iv) 2

(f) The sequence of functions $\{f_n\}_n$, where $f_n = \dfrac{\sin nx}{nx}$; $x \in (0, 1)$; $n \in \mathbb{N}$

(i) converges for all x (ii) diverges for all x

(iii) converges for all x, except for $x = 0$ (iv) diverges for all x except for $x = 1$

(g) The value of $L\{\cos at\}$ for $t > 0$ is

(i) $\dfrac{a}{s^2 + a^2}, s > 0$ (ii) $\dfrac{s}{s^2 + a^2}, s > 0$

(iii) $\dfrac{a}{s^2 - a^2}, s > |a|$ (iv) $\dfrac{s}{s^2 - a^2}, s > |a|$

(h) The value of $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s\left(s^2+1\right)}\right\}$ is

(i) $1 + \cos t$ (ii) $1 - \sin t$

(iii) $1 + \sin t$ (iv) $1 - \cos t$

(i) The domain of convergence of the series $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ is

(i) $0 < x < \infty$ (ii) $-\infty < x < 0$

(iii) $-\infty < x < \infty$ (iv) $-1 < x < 1$

(j) The domain of convergence of the sequence of functions $\{f_n\}_n$ where $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}$ is

(i) $0 < x < \infty$ (ii) $-\infty < x < 0$

(iii) $-\infty < x < \infty$ (iv) $-1 < x < 1$

2. Answer *any three* questions : 5×3

(a) Assuming the power series expansion for $(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots\ (-1 < x < 1)$, obtain the power series expansion for $\log_e(1 + x)$. Hence show that $\log_e{}^2 = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots$

(b) Let $f_n(x) = \dfrac{nx}{n + x}, x \in [0, a]$ where $a > 0$. Show that the sequecne $\{f_n\}_n$ converges uniformly on $[0, a]$.

(c) Find $L^{-1}\left[\frac{1}{(p^2+1)(p-2)}\right]$.

(d) Find the Fourier series for function $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x<0\\ x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$

(e) Find $L\{f(t)\}$, where $f(t)=\begin{cases}e^t, & 0<t\le 1\\ t, & t>1\end{cases}$

3. Answer ***any four*** questions :

(a) (i) State Cauchy's condition for uniform convergence of sequence of functions. If $f_n(x)=x^n, x\in[0,a]$; for $0<a<1$, then show that the sequence of functions $\{f_n\}_n$ converges uniformly on $[0, a]$.

(ii) Show that the sequence of functions $\{f_n\}_n$ defined by $f_n(x)=\frac{x}{x+n}; x\in[0,\infty)$ is pointwise convergent, but not uniformly convergent on $[0, \infty)$. (2+3)+5

(b) (i) State Weierstrass' M-test for uniform convergence of series of functions. Show that the series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ is uniformly convergent on $(-\infty, \infty)$.

(ii) Show that $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{x}{n}\right); x\in[0,1]$ represents a continuous function on $[0, 1]$. (2+3)+5

(c) (i) State Abel's theorem on Power Series in Limit form.

(ii) From the expansion $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots, |x|<1$, obtain the power series expansion of $\tan^{-1}x$ and hence show that $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$ 2+(5+3)

(d) Find the Fourier series for the function $f(x)$ on $(0, 2\pi)$, defined by $f(x)=\begin{cases}(x-\pi)^2, & 0<x<\pi\\ \pi^2, & \pi<x<2\pi\end{cases}$

Hence find the value of $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. 7+3

(e) (i) Find Laplace transform of the function $F(t)$, where $F(t)=\begin{cases} e^t, & 0<t\le 1 \\ t, & t>1 \end{cases}$

(ii) If $L[F(t)]=f(p)$, then prove that $L[F(at)]=\frac{1}{a}f\left(\frac{p}{a}\right)$. Hence find the value of $L[e^{-t}\cos t]$.

4+(3+3)

(f) (i) Find Laplace transformation of the function $F(t)$, where $F(t)=\frac{\cos\alpha t-\cos\beta t}{t}$.

(ii) Using Laplace transform solve the differential equation $\frac{d^2y}{dt^2}+25y=10\cos 5t;\ y(0)=2,\ y'(0)=0$

5+5

(g) (i) Find the value of $L^{-1}\left[\frac{1}{p^2(p+1)^2}\right]$

(ii) Using Laplace transform solve the differential equation :

$$\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y=4e^{-2t};\quad y(0)=-1,\ y'(0)=4$$

5+5
