

2023

## MATHEMATICS — GENERAL

Paper : DSE-B-1

(Advanced Calculus)

Full Marks : 65

Candidates are required to give their answers in their own words  
as far as practicable.

$\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{N}$  denote the set of real numbers and the set of natural numbers respectively.

প্রাপ্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

১। সঠিক উত্তরটি লেখো :

১×১০

(ক)  $\{f_n(x)\}$  অপেক্ষকের অনুক্রমটি, যেখানে  $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ ,  $0 \leq x \leq 1$

(অ) সমভাবে  $[0, 1]$  অন্তরালে অভিসারী হবে

(আ) অসমভাবে  $[0, 1]$  অন্তরালে অভিসারী হবে

(ই) সমভাবে  $(0, 1)$  অন্তরালে অভিসারী হবে

(ঈ) কোনোটিই নয়।

(খ) যদি  $\sum \frac{\cos nx}{n^p}$  শ্রেণিটি সমভাবে  $x$  এর সমস্ত বাস্তব মানের জন্য অভিসারী হয়, তাহলে  $p =$

(অ)  $\frac{1}{4}$

(আ)  $\frac{3}{2}$

(ই)  $\frac{2}{3}$

(ঈ)  $\frac{1}{2}$

(গ)  $\sum \frac{(n!)^2 x^{2n}}{(2n)!}$  যাত শ্রেণিটির অভিসারী অন্তরাল হল

(অ)  $(-1, 3)$

(আ)  $[-1, 3)$

(ই)  $(-4, 4)$

(ঈ)  $(-e, e)$

(ঘ)  $\sum \frac{(n-1)!}{n^n} x^n$  যাত শ্রেণিটির অভিসারণ ব্যাসার্ধ হল

(অ) 1

(আ)  $e$

(ই) 2

(ঈ) 4।

Please Turn Over

(ঙ)  $\cos 2\pi x$ -এর পর্যায়কাল হল

(অ)  $2\pi$

(আ) 1

(ই) 2

(ঈ) কোনোটিই নয়।

(চ) যদি  $f(x) = x + x^2$ ,  $-\pi < x < \pi$  অপেক্ষকটি Fourier শ্রেণিতে  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  রূপে প্রকাশিত

হয়, তাহলে  $a_0$ -এর মান হবে

(অ)  $\frac{1}{3}\pi^2$

(আ)  $\frac{2}{3}\pi^2$

(ই)  $2\pi^2$

(ঈ)  $\pi^2$ ।

(ছ)  $L\left\{\frac{e^{at}-1}{a}\right\} =$

(অ)  $\frac{1}{S(S-a)}$

(আ)  $\frac{1}{a(S-a)}$

(ই)  $\frac{S}{S-a}$

(ঈ)  $\frac{a}{S-a}$ ।

(জ)  $L\{te^{2t}\} =$

(অ)  $\frac{1}{S-2}$

(আ)  $2(S-2)^2$

(ই)  $\frac{1}{(S-2)^2}$

(ঈ)  $\frac{1}{S^2}$ ।

(ঝ)  $L^{-1}\left\{\frac{1}{S^2-8S+17}\right\} =$

(অ)  $e^{4t}\cos t$

(আ)  $\sin 4t$

(ই)  $e^{4t}\sin t$

(ঈ)  $e^{-4t}\sin t$ ।

(ঞ) একটি অযুগ্ম অপেক্ষকের Fourier শ্রেণিতে শুধুমাত্র থাকবে

(অ) Cosine Terms

(আ) Sine Terms

(ই) Sine এবং Cosine Terms উভয়

(ঈ) কিছুই বলা যাবে না।

২। যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

৫×৩

(ক)  $\{f_n(x)\}$  অপেক্ষকের অনুক্রমটির Limit অপেক্ষক নির্ণয় করো, যেখানে  $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}, x \in [0,1]$ ।

(খ)  $f(x) = e^x$  অপেক্ষকটিকে  $0 \leq x \leq \pi$  অন্তরালে Half range cosine Fourier শ্রেণিতে বিস্তৃত করো।

(গ)  $x + \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{3^3 x^3}{3!} + \dots$  ঘাত শ্রেণিটির অভিসরণ ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো।

(ঘ)  $L\{\sin(7t+5)\}$  -র মান নির্ণয় করো।

(ঙ)  $L^{-1}\left\{\frac{1}{S(S^2+1)}\right\}$  নির্ণয় করো।

৩। যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

(ক) (অ) একটি ঘাত শ্রেণির অভিসরণ ব্যাসার্ধের সংজ্ঞা দাও।

(আ) দেখাও যে,  $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, -1 < x < 1$ , যেখানে  $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ ,

$|x| < 1$ । Abel's Theorem ব্যবহার করে দেখাও যে,  $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  ২+(৫+৩)

(খ) (অ) অপেক্ষক শ্রেণির সমভাবে অভিসারী হওয়ার জন্য Weierstrass M-test-টি বিবৃত করো।

(আ) Weierstrass M-test ব্যবহার করে দেখাও যে,  $\{f_n(x)\}$  অপেক্ষকের অনুক্রমটি  $[0, 1]$  অন্তরালে সমভাবে অভিসারী,

যেখানে  $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2 x^2}, x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}$ । যদি  $\{f_n(x)\}$  অপেক্ষকের Limit অপেক্ষক  $f$  হয়, তাহলে দেখাও

যে,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(0) \neq f'(0)$ । ২+(৫+৩)

(গ)  $f(x) = |x|, -1 \leq x \leq 1$  অপেক্ষকটির Fourier শ্রেণিটি নির্ণয় করো। এর সাহায্যে দেখাও যে,  $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$ ।

৭+৩

(ঘ)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} - x, & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ x - \frac{3}{4}, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$  হলে  $f(x)$  অপেক্ষকটির Half range Fourier sine শ্রেণিটি নির্ণয় করো। কীভাবে

$f(x)$  অপেক্ষকটি  $x=0$  তে সংজ্ঞাত হবে যাতে শ্রেণিটি  $f(x)$ -এ অভিসারিত হয়?

৭+৩

Please Turn Over

(ঙ) (অ)  $L\left\{\frac{e^{-bt} \sin at}{t}\right\}$ -এর মান নির্ণয় করো।

(আ)  $L^{-1}\left\{\frac{1}{S^2(S+1)}\right\}$ -এর মান নির্ণয় করো, যেখানে  $L\{f(t)\} = F(S)$ ।

৫+৫

(চ) (অ) অপেক্ষক  $f(t)$ -এর Laplace transform নির্ণয় করো, যেখানে  $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \leq 1 \\ t, & 1 < t \leq 2 \\ 0, & t > 2 \end{cases}$

(আ) Laplace transform ব্যবহার করে নিম্নলিখিত অবকল সমীকরণটি সমাধান করো :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0; \quad y(0) = 0, y(1) = 2$$

৪+৬

(ছ) (অ)  $L^{-1}\left\{\frac{1}{(S^2+1)(S^2+9)}\right\}$ -এর মান নির্ণয় করো, যেখানে  $L\{f(t)\} = F(S)$ ।

(আ) Laplace transform-এর সাহায্যে নিম্নলিখিত অবকল সমীকরণটি সমাধান করো :

৪+৬

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-t}, \quad \text{given that } y(0) = 0 = y'(0).$$

### [English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

1. Write the correct answer :

1×10

(a) The sequence of functions  $\{f_n(x)\}$ , where  $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , is

- (i) uniformly convergent on  $[0, 1]$
- (ii) not uniformly convergent on  $[0, 1]$
- (iii) uniformly convergent on  $(0, 1)$
- (iv) none of the above.

(b) If the series  $\sum \frac{\cos nx}{n^p}$  is uniformly convergent for all real values of  $x$ , then  $p =$

(i)  $\frac{1}{4}$

(ii)  $\frac{3}{2}$

(iii)  $\frac{2}{3}$

(iv)  $\frac{1}{2}$

(c) The interval of convergence of the power series  $\sum \frac{(n!)^2 x^{2n}}{(2n)!}$  is

(i)  $(-1, 3)$

(ii)  $[-1, 3)$

(iii)  $(-4, 4)$

(iv)  $(-e, e)$

(d) The radius of convergence of the power series  $\sum \frac{(n-1)!}{n^n} x^n$  is

(i) 1

(ii)  $e$

(iii) 2

(iv) 4.

(e) The period of  $\cos 2\pi x$  is

(i)  $2\pi$

(ii) 1

(iii) 2

(iv) None of these.

(f) If  $f(x) = x + x^2$ ,  $-\pi < x < \pi$  be presented in Fourier series as  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ , then

the value of  $a_0$  will be

(i)  $\frac{1}{3}\pi^2$

(ii)  $\frac{2}{3}\pi^2$

(iii)  $2\pi^2$

(iv)  $\pi^2$ .

(g)  $L\left\{\frac{e^{at}-1}{a}\right\} =$

(i)  $\frac{1}{S(S-a)}$

(ii)  $\frac{1}{a(S-a)}$

(iii)  $\frac{S}{S-a}$

(iv)  $\frac{a}{S-a}$

Please Turn Over

(h)  $L\{te^{2t}\} =$

(i)  $\frac{1}{S-2}$

(ii)  $2(S-2)^2$

(iii)  $\frac{1}{(S-2)^2}$

(iv)  $\frac{1}{S^2}$

(i)  $L^{-1}\left\{\frac{1}{S^2-8S+17}\right\} =$

(i)  $e^{4t}\cos t$

(ii)  $\sin 4t$

(iii)  $e^{4t}\sin t$

(iv)  $e^{-4t}\sin t$

(j) The Fourier series of an odd function contains only

(i) Cosine Terms

(ii) Sine Terms

(iii) both Sine and Cosine Terms

(iv) Nothing can be said.

2. Answer **any three** questions :

5×3

(a) Find the limit function of the sequence of functions  $\{f_n(x)\}$ , where  $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$ ,  $x \in [0,1]$ .(b) Expand the function  $f(x) = e^x$  in a half range Fourier cosine series in  $0 \leq x \leq \pi$ .(c) Find the radius of convergence of the power series  $x + \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{3^3 x^3}{3!} + \dots$ .(d) Find the value of  $L\{\sin(7t+5)\}$ .(e) Find the value of  $L^{-1}\left\{\frac{1}{S(S^2+1)}\right\}$ .3. Answer **any four** questions :

(a) (i) Define the radius of convergence of a power series.

(ii) Assuming the power series expansion for  $(1+x)^{-1} = 1-x+x^2-x^3+\dots$ ,  $|x| < 1$ , show that, $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ ,  $-1 < x < 1$ . By using Abel's theorem deduce that,

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

2+(5+3)



- (b) (i) State Weierstrass M-test for uniform convergence of sequence of functions.  
 (ii) Using Weierstrass M-test show that, the sequence of function  $\{f_n(x)\}$  converges uniformly on  $[0, 1]$ , where  $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . If  $f$  be the limit function of  $\{f_n(x)\}$ , then show that  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(0) \neq f'(0)$ .

2+(5+3)

- (c) Find the Fourier series of the function  $f(x) = |x|$  in  $-1 \leq x \leq 1$ . Hence show that,  
 $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$ .

7+3

- (d) Let  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} - x, & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ x - \frac{3}{4}, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$ . Find the Half range Fourier sine series of  $f(x)$ . How would  $f(x)$  be defined at  $x = 0$  so that the series converges to  $f(x)$ ?

7+3

- (e) (i) Evaluate  $L \left\{ \frac{e^{-bt} \sin at}{t} \right\}$ .

- (ii) Evaluate  $L^{-1} \left\{ \frac{1}{S^2(S+1)} \right\}$ , where  $L\{f(t)\} = F(S)$ .

5+5

- (f) (i) Find the Laplace transform of the function  $f(t)$ , where,  $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \leq 1 \\ t, & 1 < t \leq 2 \\ 0, & t > 2 \end{cases}$ .  
 (ii) Using Laplace transform, solve the following differential equation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0; \text{ given that } y(0) = 0, y(1) = 2$$

4+6

- (g) (i) Evaluate  $L^{-1} \left\{ \frac{1}{(S^2+1)(S^2+9)} \right\}$ , where  $L\{f(t)\} = F(S)$ .

- (ii) Using Laplace transform, solve the following differential equation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-t}, \text{ given that } y(0) = 0 = y'(0).$$

4+6