2023

MATHEMATICS — GENERAL

Paper : DSE-A-1 and DSE-A-2

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

Paper : DSE-A-1

(Particle Dynamics)

Full Marks : 65

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

১। নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও ঃ ১×১০

(ক) যদি v গতিবেগে সরলরেখা বরাবর গতিশীল কোনো কণার গতিবেগ $v^2 = ax^2 + b$ রাশিদ্বারা প্রদত্ত হয়, যেখানে x ওই সরলরেখার কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে ওই কণাটির দূরত্ব এবং a, b ধ্রুবক, তবে কণাটির ত্বরণ সরলভেদে থাকবে নিম্নলিখিত কোনটির সঙ্গে?

(অ) $1/x^2$ (আ) $1/x$

(ই) x (ঈ) x^2।

(খ) যদি একটি বস্তুকণার ত্বরণের অভিলম্ব উপাংশ এবং স্পর্শক উপাংশ সমান হয়, তবে গতিবেগ সমানুপাতিক হবে

(অ) ψ (আ) e^{ψ}

(ই) $e^{2\psi}$ (ঈ) $e^{-\psi}$

-এর সঙ্গে, যেখানে $\tan\psi$ = স্পর্শকের নতি।

(গ) কোনো বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল ঘাতের (Impulse) পরিমাপ হল

(অ) ঘাত = গতিশক্তির পরিবর্তন

(আ) ঘাত = ভরবেগের পরিবর্তন

(ই) ঘাত = ক্রিয়াশীল বল দ্বারা কার্যের পরিমাপ

(ঈ) উপরের কোনোটিই নয়।

(ঘ) সরল দোলগতিতে চলমান বস্তুর দোলনের পূর্ণ সময়কাল

(অ) $T = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$ (আ) $T = \frac{\pi}{2\sqrt{\mu}}$

(ই) $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ (ঈ) $T = \frac{\pi}{\sqrt{2\mu}}$

(প্রতীকগুলি প্রচলিত অর্থে ব্যবহৃত)

(ঙ) যদি কোনো কণা $x = a\sin(\mu t + \varepsilon)$ নিয়ম মেনে সরলরেখা বরাবর গতিশীল হয়, তবে তার গতিবেগ v নিম্নলিখিত কোন সম্পর্কটিকে সিদ্ধ করবে?

(অ) $v^2 = \mu(a^2 - x^2)$ (আ) $v^2 = \mu^2(x^2 - a^2)$

(ই) $v^2 = \mu(x^2 - a^2)$ (ঈ) $v^2 = \mu^2(a^2 - x^2)$

যেখানে a, μ এবং ε হল ধ্রুবক।

(চ) একটি বস্তুকণার চলমান পথের বক্রের সমীকরণ $r = ae^{\theta}$, যার কৌণিক বেগ ধ্রুবক। তাহলে অরীয় ত্বরণের মান

(অ) r-এর সঙ্গে সমানুপাতিক (আ) θ-এর সঙ্গে সমানুপাতিক

(ই) শূন্য নয় এমন ধ্রুবক (ঈ) শূন্য

(ছ) $\frac{5}{16}$ পাউন্ড ভরবিশিষ্ট একটি ক্রিকেট বল 80 ফুট/সেকেন্ড গতিতে ধাবমান। বলটি একটি ব্যাটের আঘাতে 48 ফুট/সেকেন্ড গতিবেগে বিপরীত অভিমুখে ধাবিত হলে ব্যাটের অভিঘাত বল হবে

(অ) 10 পাউন্ডাল সেকেন্ড (আ) 20 পাউন্ডাল সেকেন্ড

(ই) 30 পাউন্ডাল সেকেন্ড (ঈ) 40 পাউন্ডাল সেকেন্ড

(জ) একটি কণা মূলবিন্দু (O)-কে কেন্দ্র করে সম-কৌণিক বেগে সমতলে গতিমান, তাহলে ত্বরণের অভিলম্ব উপাংশের সমানুপাতিক হবে নিম্নলিখিত রাশিগুলির কোনটি?

(অ) $\omega\frac{dr}{dt}$ (আ) $2\omega\frac{dr}{dt}$

(ই) $\frac{1}{2}\omega\frac{dr}{dt}$ (ঈ) $\omega^2\frac{dr}{dt}$

(ঝ) এক অশ্বশক্তির পরিমাপ হবে

(অ) 746.3 watts (আনুমানিক) (আ) 750 watts (আনুমানিক)

(ই) 740 watts (আনুমানিক) (ঈ) কোনোটিই নয়।

(ঞ) কেপলার-এর সূত্রানুযায়ী T যদি পর্যায়কাল ও a যদি অর্ধ পরাক্ষ (semi-major axis) হয় তবে T^2 সমানুপাতিক হবে

(অ) a (আ) a^2

(ই) a^3 (ঈ) a^4

-এর সঙ্গে।

২। *যে-কোনো একটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৫×১

(ক) স্থিরাবস্থা থেকে একটি কণা সরলরেখা বরাবর গতিশীল এবং t সময়ে তার ত্বরণ হয় $b - kt^2$, যেখানে b এবং k হল ধনাত্মক ধ্রুবক। দেখাও যে কণাটির সর্বোচ্চ (maximum) গতিবেগ হয় $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{b^3}{k}}$।

(খ) কোনো কণা $r^4 = a^4\cos4\theta$ পথে এমন একটি বলের অধীনে গতিশীল যা সর্বদাই কেন্দ্রাভিমুখী। বলের সূত্রটি নির্ণয় করো।

৩। *যে-কোনো পাঁচটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

(ক) m ভরবিশিষ্ট একটি কণা mn^2x আকর্ষক বলের অধীনে একটি সরলরেখায় গতিশীল এবং সরলরেখার উপরিস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর দিকে অভিমুখী হয় যেখানে x হল ওই নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে দূরত্ব, যদি কণাটি ওই নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে প্রারম্ভিক a দূরত্ব থেকে V গতিবেগে বলের কেন্দ্রের অভিমুখে উৎক্ষিপ্ত হয় তবে প্রমাণ করো যে, কণাটি বলের কেন্দ্রে $\frac{1}{n}\tan^{-1}\left(\frac{na}{V}\right)$ সময় পরে পৌঁছাবে। ১০

(খ) সরল দোলন গতিসম্পন্ন একটি কণার কেন্দ্রবিন্দু O-এর সাপেক্ষে পর্যায়কাল (Period) T এবং এটি OP-র অভিমুখে P বিন্দুকে V গতিবেগে অতিক্রম করে। যদি কণাটি P বিন্দুতে ফিরে আসতে t সময় নেয়, তাহলে দেখাও যে $t=\frac{T}{\pi}\tan^{-1}\left[\frac{VT}{2\pi x}\right]$, যেখানে $OP=x$। ১০

(গ) m ভরবিশিষ্ট একটি কণা $m\mu\left(x+\frac{a^4}{x^3}\right)$ আকর্ষক বলের অধীনে সরলরেখায় গতিশীল, যেখানে μ একটি ধ্রুবক। যদি মূলবিন্দু থেকে a দূরত্ব থেকে কণাটি স্থিরাবস্থা থেকে যাত্রা শুরু করে তাহলে মূলবিন্দুতে পৌঁছানোর সময় নির্ণয় করো। ১০

(ঘ) প্রমাণ করো যে, একটি সমতলে গতিশীল m_1 এবং m_2 ভরবিশিষ্ট দুটি কণার গতিশক্তি হয়

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)u^2+\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}v^2,$$

যেখানে u হল কণাদ্বয়ের ভরকেন্দ্রের গতিবেগ এবং v হল কোনো একটির অপরটির সাপেক্ষে আপেক্ষিক গতিবেগ। ১০

(ঙ) সমতলে একটি কণা প্রতি একক ভরে F কেন্দ্রীয় আকর্ষক বলের প্রভাবে চলে, প্রচলিত অর্থে ব্যবহৃত প্রতীক ধরে দেখাও যে, গতিপথের অবকলজ সমীকরণ হল $\frac{h^2}{p^3}\frac{dp}{dr}=F$। ১০

(চ) (অ) apse এবং apsidal দূরত্বের সংজ্ঞা দাও।

(আ) m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকণার ওপর $m\mu r^{-3}$ পরিমাণ কেন্দ্রাভিমুখী বল ক্রিয়া করে। কণাটি যদি C দূরত্বে অবস্থিত apse থেকে $\frac{3\sqrt{5\mu}}{5C}$ বেগে প্রক্ষিপ্ত হয়, তাহলে প্রমাণ করো যে কণাটির কক্ষপথের সমীকরণ হবে $r\cos\frac{2\theta}{3}=C$। ২+৮

(ছ) যদি v_1 এবং v_2 একটি গ্রহের রৈখিক বেগ হয় যখন সূর্য থেকে গ্রহটির দূরত্ব যথাক্রমে সর্বনিম্ন এবং সর্বোচ্চ, তবে প্রমাণ করো যে, $(1-e)v_1=(1+e)v_2$ যেখানে e হল গ্রহটির কক্ষপথের উপকেন্দ্রতা। ১০

(জ) (অ) কেপলারের গ্রহপথ সম্বন্ধিত সূত্রগুলি বিবৃত করো।

(আ) একটি বস্তুকণা $x^2=8y$ অধিবৃত্তাকার পথে এরূপ বলের অধীনে গতিশীল হয় যা সর্বদাই y অক্ষের সঙ্গে লম্ব। বলের সূত্রটি নির্ণয় করো এবং কণাটির গতিপথের যে-কোনো একটি বিন্দুতে তার গতিবেগ নির্ণয় করো। ৩+৭

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

1. Answer the following questions : 1×10

(a) If the velocity v of a particle moving in a straight line is given by $v^2 = ax^2 + b$, where x is the distance travelled from a fixed point on the line and a, b are constants, the acceleration varies as

(i) $1/x^2$ (ii) $1/x$

(iii) x (iv) x^2.

(b) If the tangential and normal components of acceleration be equal, then the velocity is proportional to

(i) ψ (ii) e^{ψ}

(iii) $e^{2\psi}$ (iv) $e^{-\psi}$,

where tan ψ = gradient of the tangent.

(c) The impulse acting on a body is given by

(i) Impulse = Change in Kinetic energy

(ii) Impulse = Change in Momentum

(iii) Impulse = Work done by acting force

(iv) None of the above.

(d) The period of oscillation of simple harmonic motion is given by

(i) $T = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$ (ii) $T = \frac{\pi}{2\sqrt{\mu}}$

(iii) $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ (iv) $T = \frac{\pi}{\sqrt{2\mu}}$.

(Symbols have their usual meaning)

(e) If a particle moves in a straight line according to the rule $x = a\sin(\mu t + \varepsilon)$, where a, μ and ε are constants, then the velocity v is given by the relation

(i) $v^2 = \mu(a^2 - x^2)$ (ii) $v^2 = \mu^2(x^2 - a^2)$

(iii) $v^2 = \mu(x^2 - a^2)$ (iv) $v^2 = \mu^2(a^2 - x^2)$

(f) A particle describes a curve $r = ae^{\theta}$ with constant angular velocity. Then the radial acceleration is

(i) proprotional to r (ii) proportional to θ

(iii) non-zero constant (iv) zero.

(g) A cricket ball weighing $\frac{5}{16}$ lb is moving with a velocity of 80 ft/second and is struck by a bat which causes it to travel in the opposite direction with a velocity of 48 ft/second. Then the impulsive force of the bat is

(i) 10 poundal sec. (ii) 20 poundal sec.

(iii) 30 poundal sec. (iv) 40 poundal sec.

(h) If a particle moves with constant angular velocity about a point O (origin) in its plane of motion, then the cross-radial acceleration is proportional to

(i) $\omega\frac{dr}{dt}$ (ii) $2\omega\frac{dr}{dt}$

(iii) $\frac{1}{2}\omega\frac{dr}{dt}$ (iv) $\omega^2\frac{dr}{dt}$.

(i) 1 Horsepower =

(i) 746.3 watts (approx.) (ii) 750 watts (approx.)

(iii) 740 watts (approx.) (iv) None of these.

(j) According to Kepler's law, if T is the time period and a be the semi-major axis then T^2 varies as

(i) a (ii) a^2

(iii) a^3 (iv) a^4.

2. Answer ***any one*** question : 5×1

(a) A particle is moving in a straight line starts from rest and the acceleration at any time t is $b-kt^2$, where b and k are positive constants. Show that the maximum velocity attainable by the particle is $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{b^3}{k}}$.

(b) A particle describes the path $r^4 = a^4\cos 4\theta$ under a force which is always directed to the pole. Find the law of force.

3. Answer ***any five*** questions :

(a) A particle of mass m moves in a straight line under an attractive force mn^2x towards a fixed point on the line when at a distance x from it. If it be projected with a velocity V towards the centre of force from an initial distance a, then prove that it reaches the centre of force after a time $\frac{1}{n}\tan^{-1}\left(\frac{na}{V}\right)$. 10

(b) A particle is performing a simple harmonic motion of period T about a centre O and it passes through a point P with a velocity V in the direction OP. If the particle returns to P in time t, then show that $t=\frac{T}{\pi}\tan^{-1}\left[\frac{VT}{2\pi x}\right]$, where $OP=x$. 10

(c) A particle of mass m is acted on by a attractive force $m\mu\left(x+\frac{a^4}{x^3}\right)$, μ being constant, towards the origin. If it starts from rest at a distance a from origin, find the time it takes to arrive at the origin. 10

(d) Prove that the kinetic energy of two particles of masses m_1 and m_2 moving in a plane is $\frac{1}{2}(m_1+m_2)u^2+\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}v^2$, where u is the velocity at the centre of mass of the particles and v is the velocity of either of them relative to the other. 10

(e) A particle describes a plane curve under the action of a central attractive force F per unit mass. Prove that in usual notation the differential equation to the path of the particle is $\frac{h^2}{p^3}\frac{dp}{dr}=F$. 10

(f) (i) Define apse and apsidal distance.

(ii) A particle of mass m moves under a central attractive force $m\mu r^{-3}$ and is projected from an apse at a distance C with velocity $\frac{3\sqrt{5\mu}}{5C}$. Prove that the orbit of the particle is $r\cos\frac{2\theta}{3}=C$. 2+8

(g) If v_1 and v_2 are the linear velocities of a planet when it is respectively at nearest and farthest from the Sun, then prove that $(1-e)v_1=(1+e)v_2$, where e is the eccentricity of the elliptic orbit of the planet. 10

(h) (i) State the Kepler's laws of planetary motion.

(ii) A particle describes a parabola $x^2=8y$ under a force always perpendicular to y axis. Find the law of force and the velocity of the particle at any point of its orbit. 3+7

Paper : DSE-A-2

(Graph Theory)

Full Marks : 65

The figures in the margin indicate full marks.

1. Choose the correct alternatives : 1×10

(a) The number of vertices necessary to construct a graph with exactly 8 edges and each vertex being of degree 2 is

(i) 6 (ii) 8

(iii) 10 (iv) 12.

(b) Let G_1 and G_2 be the only two components of a graph G with adjacency matrices $A(G_1)$ and $A(G_2)$ respectively. Then the adjacency matrix of G is

(i) $\left[\begin{array}{c|c} A(G_1) & A(G_2) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$ (ii) $\left[\begin{array}{c|c} A(G_1) & 0 \\ \hline A(G_2) & 0 \end{array}\right]$

(iii) $\left[\begin{array}{c|c} A(G_1) & 0 \\ \hline 0 & A(G_2) \end{array}\right]$ (iv) $\left[\begin{array}{c|c} 0 & A(G_1) \\ \hline A(G_2) & 0 \end{array}\right]$.

[0 being the null matrix of suitable order]

(c) In a cycle

(i) each vertex is visited exactly once

(ii) each edge is visited exactly once

(iii) both vertex and edge may be repeated

(iv) a path begins and ends at the same vertex.

(d) Maximum number of edges in an acyclic undirected graph with n vertices is

(i) n (ii) $n-1$

(iii) $\frac{n(n-1)}{2}$ (iv) 2^n.

(e) Which of the following is a property of a bipartite graph?

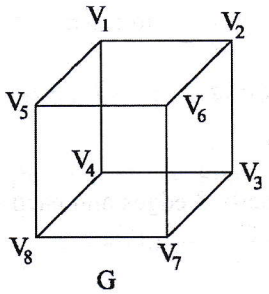
(i) It has a Eulerian circuit.

(ii) It has a Hamiltonian cycle.

(iii) It does not contain odd cycle.

(iv) It is always non-planar.

(f)



G

G is

(i) planar and regular (ii) planar and non-regular

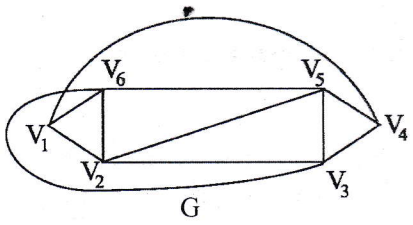
(iii) non-planar and regular (iv) non-planar and non-regular.

(g) The number of different spanning trees of the graph K_3 is

(i) 1 (ii) 2

(iii) 3 (iv) 4.

(h)



G

G is

(i) Eulerian and Hamiltonian

(ii) Eulerian and non-Hamiltonian

(iii) Non-Eulerian and Hamiltonian

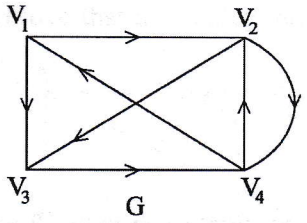
(iv) Non-Eulerian and non-Hamiltonian.

(i) Let $I(G)$ be the incidence matrix of a graph G without loop. Then the number of 1's in each column of $I(G)$ is

(i) 0 (ii) 1

(iii) 2 (iv) 3.

(j)



Number of directed walks of length 2 from V_4 to V_3 is

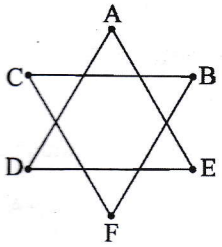
(i) 0 (ii) 1

(iii) 2 (iv) 3.

2. Answer ***any three*** questions :

(a) (i) Define a path. Give an example of a walk which is not a path.

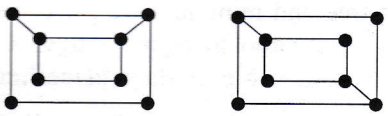
(ii) Find the connected components of the graph.



(1+2)+2

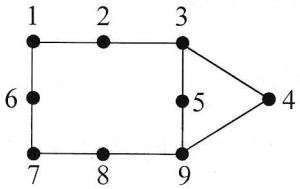
(b) (i) Draw a graph with 5 vertices which is isomorphic to its complement. Justify your answer.

(ii) Determine whether the following graphs are isomorphic or not.



2+3

(c) (i) Determine whether the following graph is bipartite. Justify your answer.



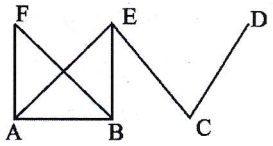
(ii) Prove that a graph which contains a triangle cannot be bipartite. 3+2

(d) (i) Find the number of pendant vertices in a binary tree with 31 vertices.

(ii) Prove or disprove that a minimally connected graph cannot have a circuit.

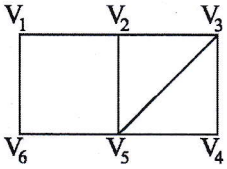
(iii) When a connected graph will be a tree? 2+2+1

(e) (i) Examine the following graph is bipartite or not.



(ii) What is the least number of vertices in a simple connected graph with 10 edges?

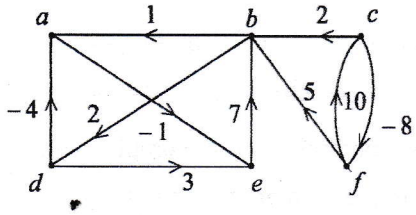
(iii) In the graph



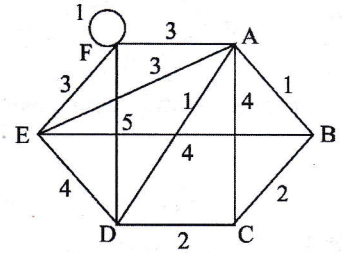
construct a path from V_1 to V_4 of length four. 2+2+1

3. Answer ***any four*** questions :

(a) Use Floyd-Warshall algorithm to find the length of the shortest path between any pair of vertices a, b, c, d, e and f of the following weighted directed graph. 10



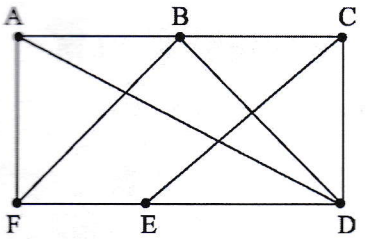
(b) (i) Determine the minimal spanning tree and minimum weight corresponding to the following graph :



(ii) Prove that there is one and only one path between every pair of vertices in a tree T. 7+3

(c) (i) Prove that a complete bipartite graph $K_{m,n}$ is Hamiltonian iff $m = n$.

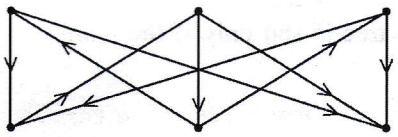
(ii)



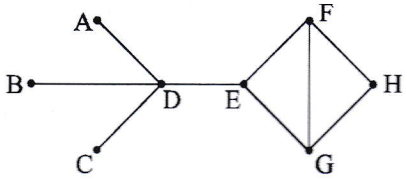
Check if the graph is planar or not.

(iii) Prove that K_5 is non-planar, but removal of one edge of K_5 makes a planar graph. 4+2+4

(d) (i) Construct the incidence matrix of the following diagraph :



(ii) Find all the spanning trees of the following graph :



5+5

(e) (i) Show that a K-regular graph of order $2K - 1$ is Hamiltonian and verify this statement by finding a Hamiltonian cycle in a 4-regular graph of order 7.

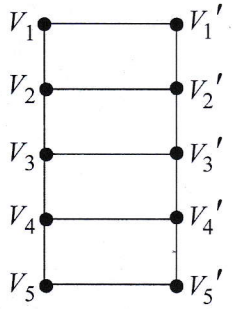
(ii) Draw a graph that is Eulerian, but non-Hamiltonian and a graph that is Hamiltonian, but non-Eulerian.

(iii) Let G be a connected 4-regular planar graph of order 8. Find the number of faces and sum of the degrees of the faces of G. 4+2+4

(f) (i) Construct a di-graph whose adjacency matrix is given by

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(ii) Find the longest and shortest path found in the graph



(iii) Prove that the number of pendant vertices in a binary tree with n vertices is $\frac{n+1}{2}$.

3+3+4

(g) (i) Prove that a connected graph G is a tree if and only if the number of vertices is one more than the number of edges in G.

(ii) Prove that a connected planar graph with n vertices and e edges has $e-n+2$ regions.

(3+2)+5