2020

MATHEMATICS — GENERAL

Paper : GE/CC-3

Full Marks : 65

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

১। নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও ঃ ১×১০

(ক) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx$ -এর মান হল

(অ) 1 (আ) $\frac{1}{4}$ (ই) π (ঈ) $\frac{\pi}{4}$।

(খ) $h=1$ ধরে $\Delta\left(\frac{1}{x-1}\right)$-এর মান হল

(অ) $\frac{1}{x}$ (আ) $\frac{1}{x-1}$ (ই) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$ (ঈ) $\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}$।

(গ) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^7 x\,dx$ -এর মান হল

(অ) π (আ) 2π (ই) $\frac{\pi}{2}$ (ঈ) 0।

(ঘ) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ -এর মান হল

(অ) $\sqrt{\pi}$ (আ) $-\sqrt{\pi}$ (ই) $\frac{\pi}{2}$ (ঈ) 0।

(ঙ) যদি 0.87654 থেকে 0.87652 বিয়োগ করা হয়, তবে যতগুলি সার্থক অঙ্কের ক্ষতি হবে, তা হল

(অ) 5 (আ) 1 (ই) 4 (ঈ) 0।

(চ) $f(x) = 0$ সমীকরণটি সমাধান করার ক্ষেত্রে Newton–Raphson পদ্ধতি ব্যর্থ হবে, যখন

(অ) $f'(x) = -2$ (আ) $f'(x) = 0$ (ই) $f''(x) = 0$ (ঈ) $f''(x) = 1$।

(ছ) কোনো রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যাতে (LPP) যার চরম বা অবম মান নির্ণয় করা হয়, তা হল

(অ) শর্ত সীমাবদ্ধতা (Constraints) (আ) বিষয়াত্মক অপেক্ষক

(ই) চলরাশি (ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(জ) $2x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 4,\ 3x_1 - 10x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 14$ সহসমীকরণ-এর মৌল চলরাশির সংখ্যা হল

(অ) 1 (আ) 2 (ই) 3 (ঈ) 4।

(ঝ) কোনটি উত্তল নয় পরীক্ষা করো ঃ

(অ) $X = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \geq 1 \text{ এবং } x^2 + y^2 \leq 2\}$

(আ) $X = \{(x,y) \mid 4x^2 + 9y^2 \leq 36\}$

(ই) $X = \{(x,y) \mid y^2 \geq 4x\}$

(ঈ) $X = \{(x,y) \mid x \geq 2,\ y \leq 3, x, y \geq 0\}$ ।

(ঞ) $S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$ সেট্‌টির প্রান্তবিন্দুগুলি হল

(অ) বৃত্তটির ভিতরের বিন্দু (আ) বৃত্তটির ওপরের বিন্দু

(ই) বৃত্তটির বাইরের বিন্দু (ঈ) বৃত্তটির ব্যাসের ওপরের বিন্দু।

ইউনিট - ১

(সমাকলন বিদ্যা)

২। *যে-কোনো তিনটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

(ক) দেখাও যে $\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} \log\left(\frac{1}{2}\right)$। ৫

(খ) যদি $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$ হয়, তবে দেখাও যে $I_{n+1} - I_{n-1} = \frac{1}{n}$।

এই সম্পর্কটি ব্যবহার করে মান নির্ণয় করো ঃ $\int_0^{\pi/4} \tan^8 x \, dx$ ৩+২

(গ) মান নির্ণয় করো ঃ $\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)...\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right\}^{\frac{1}{n}}$ ৫

(ঘ) Beta-অপেক্ষক-এর সংজ্ঞা প্রয়োগ করে প্রমাণ করো যে $\int_0^{\pi/2}\cos^4 x\,dx=\frac{3\pi}{16}$ । ৫

(ঙ) মান নির্ণয় করো ঃ $\int_0^1\frac{dx}{\left(1-x^6\right)^{1/6}}$ । ৫

ইউনিট - ২

(সাংখ্যিক পদ্ধতি))

৩। *যে-কোনো চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৫×৪

(ক) $h = 1$ ধরে দেখাও যে $\left(\frac{\Delta^2}{E}\right)x^3=6x$ ।

(খ) $0, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}$ বিন্দুগুলির সাহায্যে $y = \sin\pi x$ অপেক্ষকের জন্য অন্তঃমান-বহুপদী রাশিমালাটি নির্ণয় করো।

(গ) $f(-2) = 7, f(0) = 1, f(3) = 7$ হলে $f(10)$-এর মান কত?

(ঘ) Simpson-এর এক-তৃতীয়াংশ নিয়মে ছয়টি উপঅন্তরাল নিয়ে তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্নমানে সমাকলন করো ঃ

$$\int_0^1\frac{dx}{(1+x)^2}$$

(ঙ) নিউটনের পশ্চাদসারি অন্তঃমান নির্ণয়ের সূত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত সারণি থেকে y-এর মান নির্ণয় করো, যখন $x = 7$ ঃ

x	2	4	6	8
y	5	17	39	58

(চ) Newton–Raphson পদ্ধতি ব্যবহার করে এবং $x_0 = 2$ ধরে সমীকরণ $x^3 - 2x - 5 = 0$-এর তিন সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত একটি ধনাত্মক বীজ নির্ণয় করো।

(ছ) সমদ্বিখণ্ডন (Bisection) পদ্ধতি ব্যবহার করে $e^x = 4\sin x$ সমীকরণের ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক বীজ (চার দশমিক স্থান পর্যন্ত) নির্ণয় করো।

ইউনিট - ৩

(রৈখিক প্রোগ্রামিং)

৪। *যে-কোনো চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

(ক) প্রমাণ করো দুটি উত্তল সেটের প্রতিচ্ছেদও (intersection) একটি উত্তল সেট। এই সিদ্ধান্ত (result) কি দুটি উত্তল সেটের সংযোগের ক্ষেত্রেও সত্যি? যুক্তি দাও। ৩+২

(খ) লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করো ঃ ৫

$$\text{চরম} \quad Z = x_1 + 0.5x_2$$

$$\text{যেখানে} \quad \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\le 12 \\ 5x_1 &= 10 \\ x_1 + x_2 &\ge 8 \\ -x_1 + x_2 &\ge 4 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

(গ) প্রমাণ করো যে একটি রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যাতে বিষয়াত্মক অপেক্ষকটি চরম মান গ্রহণ করে ওই সমীকরণ সমূহের কার্যকর সমাধান দ্বারা গঠিত উত্তল সেটের প্রান্তিক বিন্দু। ৫

(ঘ) (2, 1, 3) হল নিম্নলিখিত সমীকরণ সমূহের একটি কার্যকর সমাধান ঃ

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1, \\ 6x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= 1 \end{aligned}$$

ওই কার্যকর সমাধানকে মৌল কার্যকর সমাধানে রূপান্তরিত করো। ৫

(ঙ) নিম্নলিখিত রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যাটি Penalty পদ্ধতির সাহায্যে সমাধান করো ঃ ৫

$$\text{চরম} \quad Z = 3x_1 - x_2$$

$$\text{যেখানে} \quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\ge 2 \\ x_1 + 3x_2 &\le 3 \\ x_2 &\le 4 \text{ এবং } x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

(চ) নিম্নলিখিত পরিবহন সমস্যাটির চরম সমাধান এবং সংশ্লিষ্ট পরিবহন খরচ নির্ণয় করো ঃ ৪+১

	D_1	D_2	D_3	a_i
O_1	10	9	8	8
O_2	10	7	10	7
O_3	11	9	7	9
O_4	12	14	10	4
b_j	10	10	8	

(ছ) নিম্নলিখিত আরোপ সমস্যাটির অনুকূল নিয়োগ (optimal assignment) নির্ণয় করো এবং সর্বনিম্ন খরচ নির্ণয় করো ঃ 8+১

	I	*II*	*III*	*IV*
A	5	3	1	8
B	7	9	2	6
C	6	4	5	7
D	5	7	7	6

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

1. Answer ***all*** the questions : 1×10

(a) Value of $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx$ is

(i) 1 (ii) $\frac{1}{4}$ (iii) π (iv) $\frac{\pi}{4}$.

(b) Value of $\Delta\left(\frac{1}{x-1}\right)$ taking $h=1$ is

(i) $\frac{1}{x}$ (ii) $\frac{1}{x-1}$ (iii) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$ (iv) $\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}$.

(c) The value of $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^7 x\,dx$ is

(i) π (ii) 2π (iii) $\frac{\pi}{2}$ (iv) 0.

(d) The value of $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ is

(i) $\sqrt{\pi}$ (ii) $-\sqrt{\pi}$ (iii) $\frac{\pi}{2}$ (iv) 0.

(e) If 0.87652 is subtracted from 0.87654, then the loss of significant figure is

(i) 5 (ii) 1 (iii) 4 (iv) 0.

(f) Newton–Raphson method fails for solving $f(x) = 0$ when

(i) $f'(x) = -2$ (ii) $f'(x) = 0$ (iii) $f''(x) = 0$ (iv) $f''(x) = 1$.

(g) In an LPP, we have to optimize the

(i) constraints (ii) objective function

(iii) variables (iv) none of these.

(h) Number of basic variables of the system of equations
$2x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 4,\ 3x_1 - 10x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 14$ is

(i) 1 (ii) 2 (iii) 3 (iv) 4.

(i) Examine which is not convex :

(i) $X = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \geq 1 \text{ and } x^2 + y^2 \leq 2\}$

(ii) $X = \{(x,y) \mid 4x^2 + 9y^2 \leq 36\}$

(iii) $X = \{(x,y) \mid y^2 \geq 4x\}$

(iv) $X = \{(x,y) \mid x \geq 2, y \leq 3, x, y \geq 0\}$.

(j) The extreme points of the set $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$ are the points :

(i) inside the circle (ii) on the circle

(iii) outside the circle (iv) on the diameter.

Unit - 1

(Integral Calculus)

2. Answer ***any three*** questions :

(a) Show that $\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} \log\left(\frac{1}{2}\right)$. 5

(b) If $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$, show that $I_{n+1} - I_{n-1} = \frac{1}{n}$.

Using this relation find the value of $\int_0^{\pi/4} \tan^8 x \, dx$. 3+2

(c) Find the value : $\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\ldots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right\}^{\frac{1}{n}}$ 5

(d) Using the definition of Beta function, prove that $\int_0^{\pi/2}\cos^4 x\,dx=\frac{3\pi}{16}$. 5

(e) Find the value : $\int_0^1\frac{dx}{\left(1-x^6\right)^{1/6}}$. 5

Unit - 2

(Numerical Methods)

3. Answer ***any four*** questions : 5×4

(a) Show that $\left(\frac{\Delta^2}{E}\right)x^3=6x$, taking $h=1$.

(b) Find the interpolation polynomial for the function $y=\sin\pi x$, by choosing the points $0, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}$.

(c) If $f(-2)=7$, $f(0)=1$, $f(3)=7$, find $f(10)$.

(d) Use Simpson's one-third rule to evaluate $\int_0^1\frac{dx}{(1+x)^2}$ taking six subintervals, correct up to 3 decimal places.

(e) Use Newton's Backward interpolation formula to find the value of y when $x=7$ from the following table :

x	2	4	6	8
y	5	17	39	58

(f) Using Newton–Raphson method find a positive root of the equation $x^3-2x-5=0$, correct up to three significant figures by choosing the initial approximation $x_0=2$.

(g) Find the smallest positive root of the equation $e^x=4\sin x$, correct to four decimal places by Bisection method.

Unit - 3

(Linear Programming))

4. Answer ***any four*** questions :

(a) Prove that intersection of two convex sets is also a convex set. Is the result true for union of two convex set? Justify. 3+2

(b) Solve graphically : 5

$$\text{Max. } Z = x_1 + 0.5x_2$$
$$\text{subject to } 3x_1 + 2x_2 \le 12$$
$$5x_1 = 10$$
$$x_1 + x_2 \ge 8$$
$$-x_1 + x_2 \ge 4$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

(c) Prove that the objective function of an LPP assumes its optimal value at an extreme point of the convex set of feasible solutions. 5

(d) (2, 1, 3) is a feasible solution of the set of equations :

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1,$$
$$6x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 1$$

Reduce it to a basic feasible solution of the set. 5

(e) Solve the LPP by the method of Penalty :

$$\text{Maximize } Z = 3x_1 - x_2$$
$$\text{subject to } 2x_1 + x_2 \ge 2$$
$$x_1 + 3x_2 \le 3$$
$$x_2 \le 4 \quad \text{and } x_1, x_2 \ge 0.$$

5

(f) Find the optimal solution and the corresponding cost of the transportation problem given by : 4+1

	D_1	D_2	D_3	a_i
O_1	10	9	8	8
O_2	10	7	10	7
O_3	11	9	7	9
O_4	12	14	10	4
b_j	10	10	8	

(g) Find the optimal assignments to find the minimum cost for the assignment problem with the cost matrix :

	I	*II*	*III*	*IV*
A	5	3	1	8
B	7	9	2	6
C	6	4	5	7
D	5	7	7	6

Also find the minimum cost. 4+1