

2020

MATHEMATICS — GENERAL

Paper : GE/CC-1

Full Marks : 65

Candidates are required to give their answers in their own words
as far as practicable.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

১নং প্রশ্ন আবশ্যিক এবং প্রতি ইউনিট থেকে কমপক্ষে একটি করে মোট নয়টি প্রশ্নের উত্তর দাও।

১। নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির মধ্যে থেকে সঠিক উত্তরটি নির্বাচন করো :

২×১০

(ক) $\operatorname{Re}\left(i^{1/2}\right) + \left|\operatorname{Im}\left(i^{1/2}\right)\right|$ -এর সঠিক মান

(অ) -1, 1

(আ) $0, \sqrt{2}$

(ই) 0, 1

(ঈ) $1, \sqrt{2}$

(খ) যদি $\alpha, \beta, \gamma, x^3 - 3x^2 + 3x + 7 = 0$ -এই সমীকরণটির বীজগুলির মান হয় এবং একক এর ঘনমূল যদি ω হয় তাহলে $(\alpha - 1)/(\beta - 1) + (\beta - 1)/(\gamma - 1) + (\gamma - 1)/(\alpha - 1)$ -এর মান

(অ) ω (আ) ω^2 (ই) 3ω (ঈ) $3\omega^2$

(গ) $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, যেখানে P এবং Q হল x -এর অপেক্ষক (function), এই অবকল সমীকরণটির সমাকল গুণকটি হল

(অ) $\int e^{Pdx}$ (আ) $e^{\int Pdx}$ (ই) $e^{-\int Pdx}$

(ঈ) কোনোটিই নয়।

(ঘ) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x \sin \frac{dy}{dx}$ অবকল সমীকরণটির মাত্রা (degree) হল

(অ) 1

(আ) 2

(ই) 3

(ঈ) সংজ্ঞায়িত না।

(ঙ) $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ -এই সরলরেখা যুগলের ওপর লম্ব সরলরেখা যুগলগুলি হল

(অ) $ax^2 - 2hxy + by^2 = 0$ (আ) $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ (ই) $bx^2 + 2hxy + ay^2 = 0$ (ঈ) $bx^2 - 2hxy + ay^2 = 0$

(চ) α, β, γ যদি $x^3 - 3x^2 + 8x - 5 = 0$ -এই সমীকরণটির বীজ হয় তাহলে সেই সমীকরণটি নির্ণয় করো যার বীজ হবে $2\alpha + 3, 2\beta + 3$, এবং $2\gamma + 3$

(অ) $y^3 + 15y^2 + 95y - 217 = 0$ (আ) $y^3 - 15y^2 + 95y - 217 = 0$ (ই) $y^3 - 15y^2 - 95y - 217 = 0$ (ঈ) $y^3 + 15y^2 + 95y + 217 = 0$

Please Turn Over

(ছ) k -এর মানটি নির্ণয় করো যার জন্য $x^2 + y^2 + 2x + k = 0$ সরলরেখা যুগল হবে

- (অ) 1 (আ) 2 (ই) 3 (ঈ) 4

(জ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^{-1}(1-x)}{\sqrt{x}}$ -এর মান হল

- (অ) π (আ) $\frac{\pi}{2}$ (ই) $\frac{\pi}{3}$ (ঈ) $\frac{\pi}{4}$

(ঝ) A -এর কোন মান এর জন্য $f(x)$ অপেক্ষকটি $x = 0$ তে সন্তত যেখানে $f(x) = \sin x \cos \frac{1}{x}, x \neq 0$
 $= A, x = 0$

- (অ) 0 (আ) 1 (ই) 2 (ঈ) 3

(ঞ) যদি $u(x, y) = \tan^{-1} \frac{x^3 + y^3}{x - y}, x \neq y$ হয়, তবে $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$ -এর মান হল

- (অ) $\sin u$ (আ) $\cos u$
(ই) $\sin 2u$ (ঈ) $\cos 2u$

Unit-I

(Algebra - I)

২। (ক) যদি $\tan \log(x + iy) = a + ib, a^2 + b^2 \neq 1$ হয়, তবে দেখাও যে $\tan \log(x^2 + y^2) = \frac{2a}{1 - a^2 - b^2}$

(খ) $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$ সমীকরণের বীজগুলি $\alpha - \beta, \alpha$ এবং $\alpha + \beta$ হলে দেখাও যে $3\alpha^2 - \beta^2 = 23$ ৩+২

৩। যদি $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ হয়, তাহলে দেখাও $A^3 - 5A^2 + 6A - 5I = 0$ এবং সেখান থেকে A^{-1} -এর মান নির্ণয় করো। ৩+২

৪। Cardan-এর পদ্ধতির সাহায্যে সমাধান করো : $x^3 - 12x + 65 = 0$ ৫

Unit-II

(Differential Calculus - I)

৫। (ক) a এবং b -এর মান নির্ণয় করো যার জন্য $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + a \cos x) - b \sin x}{x^3} = 1$

(খ) যদি $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-a|}{x-a}, & x \neq a \\ 1, & x = a \end{cases}$ হয়,

তবে $x = a$ তে f সমস্ত কি না নির্ধারণ করো।

৩+২

৬। (ক) যদি $y = e^{ax} \cos^2 x \sin x$ হয়, তবে y_n -এর মান নির্ণয় করো।

(খ) যদি $y^{1/m} + y^{-1/m} = 2x$ হয়, তবে দেখাও $(x^2 - 1)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0$

২+৩

৭। $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x, \forall x \in [0, \pi]$ -এর চরম এবং অবম মান নির্ণয় করো।

৫

৮। যদি $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ হয়, তাহলে দেখাও $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{-3}{(x+y+z)^2}$

৫

৯। $x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + xy - y^2 - 1 = 0$ -এর সমস্ত স্পর্শপ্রবণ রেখাগুলি নির্ণয় করো।

৫

Unit-III

(Differential Equation - I)

১০। (ক) $y = e^{-x}(A \cos x + B \sin x)$ সমীকরণ থেকে অবকল সমীকরণটি নির্ণয় করো, যেখানে A, B হল Parameters।

(খ) সমাধান করো : $\left(1 + e^{x/y}\right) dx + e^{x/y} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$

২+৩

১১। সমাধান করো : $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{1+x^2}\right)y = \frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}$

৫

১২। $y = px + ap(1-p), p = \frac{dy}{dx}$ সমীকরণটির সাধারণ (General) ও অনন্য (Singular) সমাধান নির্ণয় করো।

২+৩

Unit-IV

(Co-ordinate Geometry)

১৩। যদি $(a+b)(al^2 + 2hlm + bm^2) = 0$ হয়, তবে দেখাও যে $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ এবং $lx + my = 1$ দ্বারা নির্মিত ত্রিভুজটি সমকোণী।

৫

১৪। যদি $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ একটি সামান্তরিকের দুটি সংলগ্ন বাহুর সমীকরণ হয় এবং $lx + my = 1$ তার একটি কর্ণ হয় তাহলে দেখাও যে $y(bl - hm) = x(am - hl)$ তার আর একটি কর্ণ হবে।

৫

১৫। $7x^2 - 2xy + 7y^2 - 16x + 16y - 8 = 0$ সমীকরণটিকে তার canonical রূপে পরিবর্তিত করো এবং সেখান থেকে কণিকটির প্রকৃতি (nature) নির্ণয় করো।

৫

Please Turn Over

- ১৬। $\frac{l}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta$ সরলরেখাটি $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ কণিকটিকে স্পর্শ করলে প্রমাণ করো যে $(A - e)^2 + B^2 = 1$ । ৫
- ১৭। যদি $y^2 = 4ax$ -এর সাপেক্ষে একটি বিন্দুর পোলার $x^2 = 4by$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে তবে দেখাও ওই বিন্দুর সঞ্চারণপথের সমীকরণ $xy + 2ab = 0$ হবে। ৫

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

Answer **question no. 1** and **any nine** from the rest, taking at least **one** question from each **Unit**.

1. Choose the correct option from each of the following questions : 2×10
- (a) Find the possible value(s) of $\operatorname{Re}(i^{1/2}) + |\operatorname{Im}(i^{1/2})|$.
- (i) $-1, 1$ (ii) $0, \sqrt{2}$
 (iii) $0, 1$ (iv) $1, \sqrt{2}$
- (b) If α, β, γ are the roots of equation $x^3 - 3x^2 + 3x + 7 = 0$ and ω is cube root of unity, then value of $(\alpha - 1)/(\beta - 1) + (\beta - 1)/(\gamma - 1) + (\gamma - 1)/(\alpha - 1)$ is
- (i) ω (ii) ω^2
 (iii) 3ω (iv) $3\omega^2$
- (c) Integrating factor of differential equation $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, where P and Q are functions of x is
- (i) $\int e^P dx$ (ii) $e^{\int P dx}$ (iii) $e^{-\int P dx}$ (iv) None of these.
- (d) The degree of the differential equation $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x \sin \frac{dy}{dx}$ is
- (i) 1 (ii) 2 (iii) 3 (iv) not defined.
- (e) The pair of straight lines perpendicular to the pair of lines $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ has the equation
- (i) $ax^2 - 2hxy + by^2 = 0$ (ii) $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$
 (iii) $bx^2 + 2hxy + ay^2 = 0$ (iv) $bx^2 - 2hxy + ay^2 = 0$
- (f) If α, β, γ be the roots of the equation $x^3 - 3x^2 + 8x - 5 = 0$ then the equation whose roots are $2\alpha + 3, 2\beta + 3, 2\gamma + 3$ is
- (i) $y^3 + 15y^2 + 95y - 217 = 0$ (ii) $y^3 - 15y^2 + 95y - 217 = 0$
 (iii) $y^3 - 15y^2 - 95y - 217 = 0$ (iv) $y^3 + 15y^2 + 95y + 217 = 0$

(g) The value of k for which the equation $x^2 + y^2 + 2x + k = 0$ represents a pair of straight line is

- (i) 1 (ii) 2 (iii) 3 (iv) 4

(h) The value of $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^{-1}(1-x)}{\sqrt{x}}$ is

- (i) π (ii) $\frac{\pi}{2}$ (iii) $\frac{\pi}{3}$ (iv) $\frac{\pi}{4}$

(i) The value of A for which the function $f(x)$ is continuous at $x = 0$ where

$$f(x) = \sin x \cos \frac{1}{x}, x \neq 0$$

$$= A, x = 0 \text{ is}$$

- (i) 0 (ii) 1 (iii) 2 (iv) 3

(j) If $u(x, y) = \tan^{-1} \frac{x^3 + y^3}{x - y}$, $x \neq y$ then the value of $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$ is

- (i) $\sin u$ (ii) $\cos u$ (iii) $\sin 2u$ (iv) $\cos 2u$

Unit-I

(Algebra - I)

2. (a) If $\tan \log(x + iy) = a + ib$, where $a^2 + b^2 \neq 1$, then prove that $\tan \log(x^2 + y^2) = \frac{2a}{1 - a^2 - b^2}$.

(b) If $\alpha - \beta, \alpha, \alpha + \beta$ are the roots of the equation $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$ then prove that $3\alpha^2 - \beta^2 = 23$. 3+2

3. If $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ show that $A^3 - 5A^2 + 6A - 5I = 0$. Hence find A^{-1} . 3+2

4. Solve by Cardan's method : $x^3 - 12x + 65 = 0$. 5

Unit-II

(Differential Calculus - I)

5. (a) Find the values of a and b in order that $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + a \cos x) - b \sin x}{x^3}$ may be equal to 1.

Please Turn Over

(b) Examine the continuity of the function defined by $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-a|}{x-a}, & x \neq a \\ 1, & x = a \end{cases}$

at the point $x = a$.

3+2

6. (a) Find y_n , if $y = e^{ax} \cos^2 x \sin x$.

(b) If $y^{1/m} + y^{-1/m} = 2x$, prove that $(x^2 - 1)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0$

2+3

7. Find the maxima and minima of the function $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x, \forall x \in [0, \pi]$.

5

8. If $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$, show that $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{-3}{(x+y+z)^2}$.

5

9. Find all asymptotes of $x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + xy - y^2 - 1 = 0$

5

Unit-III

(Differential Equation - I)

10. (a) Find the differential equation of the curve $y = e^{-x}(A \cos x + B \sin x)$, A, B are parameters.

(b) Solve : $\left(1 + e^{x/y}\right) dx + e^{x/y} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$.

2+3

11. Solve : $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{1+x^2}\right)y = \frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}$

5

12. Find the general and singular solution of $y = px + ap(1-p), p = \frac{dy}{dx}$.

2+3

Unit-IV

(Co-ordinate Geometry)

13. Show that the triangle formed by the straight lines $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ and $lx + my = 1$ is right angled, if $(a+b)(al^2 + 2hlm + bm^2) = 0$.

5

14. If $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ be the equation of two adjacent sides of a parallelogram and $lx + my = 1$ be the equation of one of its diagonals, then show that the equation of its other diagonal is $y(bl - hm) = x(am - hl)$.

5

15. Reduce the equation $7x^2 - 2xy + 7y^2 - 16x + 16y - 8 = 0$ to its canonical form and hence determine the nature of the conic. 5
16. If the straight line $\frac{l}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta$ touches the conic $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$, then show that $(A - e)^2 + B^2 = 1$. 5
17. If the polar of a point with respect to the parabola $y^2 = 4ax$ touches the parabola $x^2 = 4by$, then show that the locus of the point is $xy + 2ab = 0$. 5
-